变分不等式近似解引论

〔意〕U .Mosco著



海科学技术出版社

变分不等式近似解引论

[意] U. Mosco 著

王烈衡 王荩贤 等译

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书的目标是对椭圆型变分不等式提供一个引论，特别着重于解的有限维逼近。

在每一章开始都有较详细的引言。

变分不等式近似解引论

［意］U. Mosco 著

王烈衡 王荩贤 等译

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行 无锡县人民印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 4 字数 86,000

1985年4月第1版 1985年4月第1次印刷

印数：1—8,100

统一书号：13119·1197 定价： 0.[illegible]5 元

译 者 的 话

一九七九年上半年，由清华大学应用数学教研室、中国科学院数学研究所和计算中心的部分同志联合举办了"变分不等式"讨论班，以意大利罗马大学数学系 U. Mosco 教授的"变分不等式近似解引论"为基本材料．该书是意大利罗马大学等数学系至今为研究生开设"非线性泛函分析"课程的讲义．在学习和研究过程中，我们发现该书运用拓扑和泛函分析的基本知识，为变分不等式及其近似解分析建立了独特的、相当完整的框架．而且只要具备泛函分析及数学物理方程的知识，就能无困难地阅读该书．因此我们决定着手翻译．

作者 U. Mosco 教授，得知我们已将该书译成中文，非常高兴，并欣然为中译本写了热情洋溢的前言．同时需要说明的是，正如作者指出的那样，由于近几年来有限元方法的发展，变分不等式的有限元逼近已有了很大的进展．而该书写于 1971 年显然不能包含近期有限元分析的内容，对此有兴趣的读者可参阅相应的材料．

参加本书翻译工作的，有清华大学的胡显承、陈景良、关治，中国科学院数学所的邵秀民和计算中心的崔俊芝、王荩贤、王烈衡等同志，由王烈衡和王荩贤同志最后统一并校阅．

我们还应当感谢冯康教授、石钟慈和黄鸿慈同志对讨论班和翻译过程中的支持和帮助．

鉴于我们水平有限，译文中错误和缺点在所难免，希望读者批评指正．

译　者　一九八三年十二月十六日于北京

作 者 序 言

现在大家所熟悉的变分不等式起源于 Guido Stampacchia 的一篇论文以及稍后由他与 Jacques-Louis Lions 合作的另一篇论文，这两篇论文发表于六十年代中期.

从那以后，无论在理论的深入方面以及在应用范围的扩大方面，都有了很大的发展.

这本书是 1971 年在意大利为 CIME 举办的讲座而撰写的. 其主要目的是为了阐述变分不等式理论的某些方面，主要包括解的存在性和近似算法. 在这次译成中文的时候，对原有的内容没有作什么改动，如果某些章节作些修改可能更好，特别是从那时以来，在数值解主要发展方向上受到了正在兴起的有限元方法的强烈影响.

我要深切地感谢中国同行们，他们以极大的耐心和友谊为这本书的翻译付出了辛勤的劳动.

我也要向冯康教授表示我最诚挚的感情，几年以前，我曾在意大利荣幸地见到了他. 我现在仍然能回忆起在罗马他和黄鸿慈教授在我家作客时的愉快情景，那时候我的妻子 Giuliana 还和我们在一起，她对中国朋友以及他们所代表的中国文化表示的强烈兴趣和感情仍然感染着我并使我深信在我们两国文化之间进行更深入的了解和富有成果的交流所具有的价值.

U. Mosco

1982 年 6 月 30 日于罗马

目　录

第 一 章

极小问题和变分不等式：凸性、单调性和不动点

本章是一个导引，其目的在于展示变分不等式基本理论的一些简单的几何特性，变分不等式在求一个凸泛函在凸集上极小化的问题里，也是基本的.

这些问题解的大部分特征导致一些涉及给定泛函的微分的不等式. 这个微分是从泛函所定义的空间到其对偶空间的一个单调映射. 对于函数空间中的极小问题而言，这些不等式应被看成为变分学中 Euler 条件在解的单边约束下的类似形式.

变分不等式方法在于直接处理这样的不等式，而不预先假定所涉及的单调算子是一个凸泛函的微分. 此外，即使在这种特殊的情况下，像 Euler 方程那样，它们常常被用来考察原来极小问题的性质，例如正则性，即解的光滑性，而且它们也出现在不同于直接 Ritz 解法的各种近似解法里.

因此，单调不等式具有凸优化的某些基本特征，这件事是很有兴趣的，在我们的讲义里将要讨论到这种单调不等式.

让我们来回忆一下凸性的某些基本方面.

首先，任何一个局部极小实际上是总体极小. 这个性质的好处是显然的：例如，只要求对泛函和约束作"局部"的研究，这意味着在用计算机时只需要存贮较少的信息.

把一个无限维极小问题建立在一个凸框架中(如果可能的话)的另一个动机,是这样可以提供一个"好"的拓扑. 事实上,众所周知在足够弱的拓扑下凸泛函会保持它们的半连续性(semicontinuity),这里所说的足够弱是指:在合理的有界性假设下,在适当的函数空间里约束集是紧致集,上述有界性假设在所研究的问题里多数是固有的,因而极小值的存在是Weierstrass定理的一个直接结果.

凸性的另一个特点是某种线性化总是可能的. 从另一方面来说,这是存在好的拓扑的根本原因. 正像后面我们将要看到的,在无限维变分不等式的存在性理论中,问题的线性化是基本的工具.

在本章我们将要讨论的凸极小问题的等价形式,可以暂时命名如下:

I 直接形式

II 梯度或弱形式

III 线性化形式

IV 不动点和迭代的不动点形式

V 上图形式

应当提到的进一步方法是

VI 对偶性和极小极大方法

VII 补偿化和正则化方法

也许我们还应当说,这些解法中的许多方法经常是同时被采用,并且可以以各种形式与有限维的近似解法结合起来,在随后的章节里我们将要讲到这些近似方法.

在下面的§1~§5里我们首先直观地概述I~V,而把它们等价性的严格证明推迟到后面几节,在那里我们还将讨论单调变分不等式的进一步性质. 关于对偶性理论的详细叙述

我们将放在第三章§7里，而在上述VI和VII里提到的其他课题(尽管它们是重要的)，在本书里将不予涉及.

我们要指出，在 J. L. Lions[1] 里可以找到关于变分不等式的基于补偿化和正则化策略的方法的详细讨论，而对偶性和极小极大方法的叙述可以在 J. L. Lions, R. Glowinski 和 R. Tremolieres[1] 中找到.

§1 直接形式

考虑在 n 维欧氏空间 E^n 的一个凸子集 K 上，使一个实值凸函数 F 极小化的问题，即问题

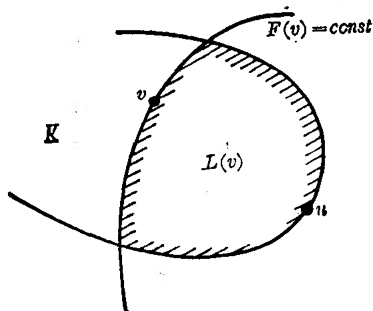
I　　$u \in K$: $F(u) \leqslant F(v)$　　对所有 $v \in K$.

如果对于空间的任何一个固定的向量 v，我们引进 F 在 K 上的水平集 $L(v)$(可能为空集)

$$L(v) = \{w \in K,\ F(w) \leqslant F(v)\}$$

则 I 可以等价地写成为

$$u \in \bigcap_{v \in k} L(v).$$



附注 1　问题 I 的所有解 u 的集合是凸的，因为对于每个 v, $L(v)$ 是凸的. 倘若 F 是下半连续 (lower semicontinuous) 的且 K 是闭的，则所有解 u 的集合也是闭的，因为此时 $L(v)$ 也是闭的. ∎

注意在整个这一章里，我们均不考虑解的存在性问题. 换句话说，我们假定解存在，而仅仅根据 F 和 K 来考察解和解的集合的性质.

§2 弱形式

现在假定 F 在 E^n 上是可微的，令

$$\nabla F(v)=\left(\frac{\partial F}{\partial v_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial v_n}\right)$$

是 F 在 E^n 中的点 $v=(v_1, \cdots, v_n)$ 处的梯度，

$$\nabla F: \quad E^n \to E^n$$

而且 $(\nabla F(v)|w)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial v_i}\cdot w_i, \quad w=(w_1, \cdots, w_n).$

附注2 $\nabla F(z)$ 是在 z 点指向 F 最大增加方向的一个向量：由于 F 是凸的，因此 F 的水平集也是凸的，在任何点 z，指向同一个由 $\nabla F(z)$ 定向的半空间的所有方向 $w-z$ 都是使 F 增加(即非减少)的方向，即所有使

$$(\nabla F(z)|w-z)\geqslant 0$$

的向量．我们将称它们为 z 的前方．】

对于 E^n 中任何一个固定的 v，现在引进集合

$$M(v)=\{z\in K: (\nabla F(z)|v-z)\geqslant 0\},$$

它是 K 中所有这样的 z 的集合，由 z 来看 v 位于其前方．

显然，一个向量 u 使 F 在 K 上达到极小，当且仅当从 u 看 K 中所有的向量 v 都是在前方，即Ⅰ等价于结论

$$u\in\bigcap_{v\in K} M(v),$$

即是说上述问题1等价于问题

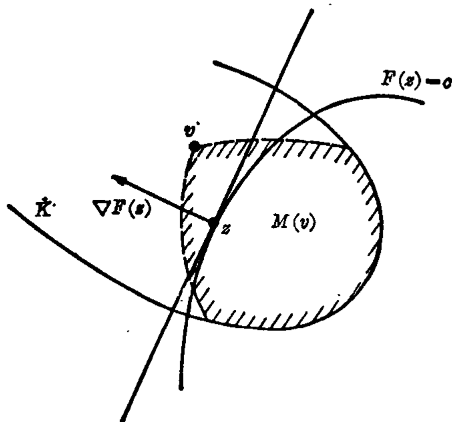
II $\quad u\in K$: $(\nabla F(u)|v-u)\geqslant 0 \quad$ 对所有 $v\in K$.

附注3 若 u 属于 K 的内部，则 II 等价于

$$u\in K,\ (\nabla F(u)|w)=0 \qquad \text{对所有 } w\in E^n.$$

它是下述方程的弱形式

$$\nabla F(u)=0.$$



〔事实上，如果 $u\in \text{int}\, K$，则对于所有充分小的 $\rho<0$，向量 $v=u\pm\rho w$ 均属于 K，而不管 w 是空间的什么向量；因此，我们可以把这样的 v 代入不等式 II，得到 $\pm\rho(\nabla F(u)|w)\geqslant 0$，由于 $\rho>0$，所以 $(\nabla F(u)|w)=0$.〕 ∎

§3 线性化形式

I 和 II 两者均可以看作为 u 的无限非线性不等式组．然而，正如下面将会看到的，我们可以用线性不等式组来刻划 I 和 II 的解 u.

对于空间的任一给定点 v，引入如下一个集合是方便的：

$$N(v)=\{w\in K:(\nabla F(v)|(v-w)\geqslant 0\}$$

它是所有位于 v 的后方的那些 w 的集合.

注意，这儿的后方不一定表示 F 不增加的方向；它只是表示方向 $w-v$ 指向 $\nabla F(v)$ 的相反半空间.

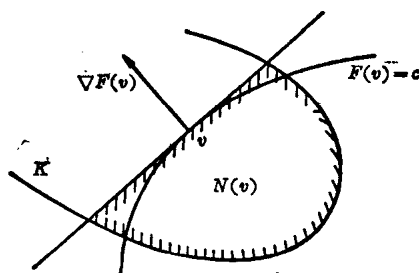
显然，u 使 F 在 K 上达到极小，当且仅当对 K 中所有

点 v 而言，u 均位于后方，即

$$u\in\bigcap_{v\in k}N(v).$$

因此，问题 I 等价于

II　　$u\in K$：$(\nabla F(v)|v-u)\geqslant 0$　　对所有 $v\in K$，



它的确是 u 的线性不等式组.

附注 4　我们不能直接看出问题 II 的所有解的集合是凸的，然而对于上述问题 III 而言，这个性质是显而易见的，正像对于直接极小问题 I 那样，即使用任何由 E^n 到其自身的映射 A 来代替 ∇F 也是如此.

§4　不动点形式

令 u 是 K 中一个向量，它使 F 在 K 上达到极小，并假定 $\nabla F(u)\neq 0$. 如果我们由 u 向后移动到某个向量

$$u-\rho\nabla F(u),\quad \rho>0,$$

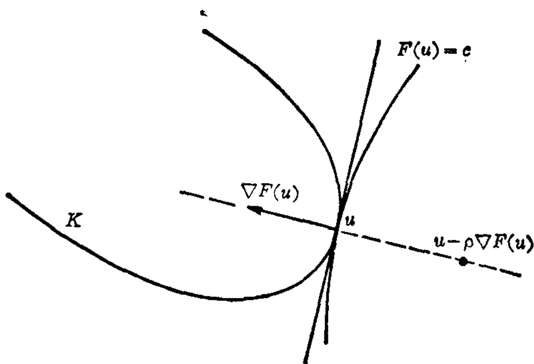
则我们便沿着正交于支撑超平面的方向离开了凸集 K.

〔向量 $u-\rho\nabla F(u)$ 不可能属于 K. 因为，否则，将与 F 在 u 点达到其在 K 上的极小相矛盾.〕

因此，如果我们把向量 $u-\rho\nabla F(u)$ 投影到 K 上，则又落到了我们的出发点 u，即有

IV　　$$u=P_K(u-\rho\nabla F(u)),\quad \rho>0,$$

其中 P_K 表示到 K 上的最小距离投影. 这说明了 u 是下述映射的不动点，



$$P_K(I-\rho\nabla F)\quad \rho>0,$$

I 表示 E^n 上的恒等映射. 注意, 如果 $\nabla F(u)=0$, 则 IV 简化为 $u=P_Ku$, 是 $u\in K$ 的平凡结果.

现在假设 u 是映射 $P_K(I-\rho\nabla F)$ 的不动点, 我们来证明 u 必定是 F 在 K 上的极小点.

让我们分两种情况证明之:

第一: $$u-\rho\nabla F(u)\in K$$

则 $$u=P_K(u-\rho F(u))=u-\rho\nabla F(u)$$

因此 $$\nabla F(u)=0$$

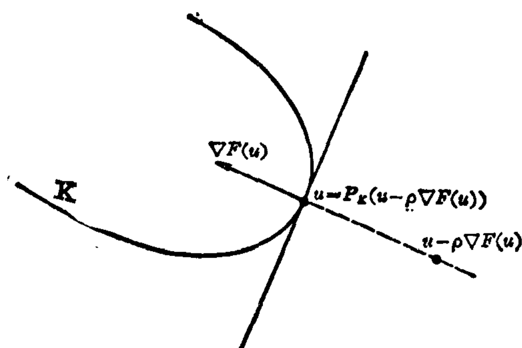
这意味着 u 使 F 达到了极小.

第二: $u-\rho\nabla F(u)\notin K$, 特别是 $\nabla F(u)\neq 0$,

则 $u-\rho\nabla F(u)$ 在 K 上的投影 u 无疑将位于 K 的边界上在 u 点垂直于 $\nabla F(u)$ 的超平面将是凸集 K 的支撑超平面, K 将全部包含在 u 点的前方半空间里, 这即是 u 使 F 在 K 上达到极小.

附注 5 不动点形式 IV 暗示了一个寻求极小点 u 的迭代算法, 即

IV$_n$ $$u_{n+1}=P_K(u_n-\rho\nabla F(u_n))\quad \rho>0,$$



只要映射 $P_K(I-\rho\nabla F)$
在 K 上是一个压缩映射，可以预料，从 IV_n 将得到近似 u_n 的一个收敛序列．在优化理论里，算法 IV_n 作为一个"投影梯度法"是众所周知的．在第二章里我们还将回到这个问题上．∎

§5 上图形式

至今所讨论的极小化向量 u 的全部特征均要求 F 是可微的．但是，即使 F 不可微，借助于一个不等式组来给出 u 的特征也是可能的，这涉及到 F 的上图(epigraph)，即积空间 $E^n\times\mathbb{R}$ 的子集

$$\mathrm{epi}\,F=\{[v,\beta]:\ F(v)\leqslant\beta\}$$

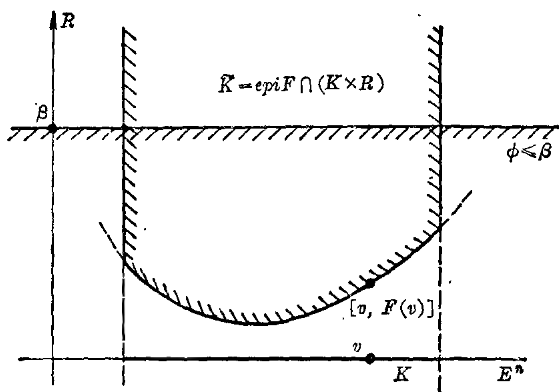
事实上，令 $\widetilde{K}$ 是 $\mathrm{epi}\,F$ 与空间 $E^n\times\mathbb{R}$ 的"柱体" $K\times\mathbb{R}$ 的交集，即

$$\widetilde{K}=\{[v,\beta]:\ v\in K,\ F(v)\leqslant\beta\}.$$

显然，u 使 F 在 K 上达到极小，当且仅当 $[u,F(u)]$ 使函数

$$\Phi([v,\beta])=\beta$$

在凸集 $\widetilde{K}$ 上达到极小．注意，Φ 的水平集是 $E^n\times\mathbb{R}$ 的半空间：$\{[w,\gamma]:\gamma\leqslant\beta\}$，$\beta\in\mathbb{R}$.



在 $E^n\times\mathbb{R}\simeq E^{n+1}$ 上，凸函数 Φ 显然是可微的，并且梯度不变，对于所有 $[v, \gamma]\in E^n\times\mathbb{R}$，均有

$$\nabla\Phi([v, \gamma])=[0, 1]$$

即

$$\nabla\Phi=0\times 1$$

因此，$\tilde{u}=[u, F(u)]$ 使函数 Φ 在凸集 $\tilde{K}$ 上达到极小，当且仅当 $\tilde{u}$ 是下述不等式组的一个解时：

V $\quad \tilde{u}\in\tilde{K} \quad (\nabla\Phi(\tilde{u})\,|\,\tilde{v}-\tilde{u})\geqslant 0 \quad$ 对所有 $\tilde{v}\in\tilde{K}$.

我们原来的极小问题 I 与上述问题 V 的等价性还可以通过直接计算来验证(参看 § 9).

§ 6 赋范空间中的极小问题

本节我们将在无限维赋范空间框架下，证明 § 3～§ 5 中的问题 I～III 的等价性.

设 X 为一个实赋范空间，X^* 为 X 的对偶空间，(v^*, v) 为 $v\in X$ 和 $v^*\in X^*$ 的对偶积. 设

$$F:\ X\rightarrow R$$

为一凸泛函，我们假定它是(Gateaux)可微的，其微分

$$DF:\ X\to X^*$$

定义为 $(DF(v),\ w)=\frac{d}{dt}F(v+tw)\Big|_{t=0}\quad v,\ w\in X$

我们有以下命题：

命题 1 设 F 是 X 上的一可微凸泛函，K 是 X 的一凸子集，则下列问题 I, II 及 III 等价

I $\quad u\in K\quad F(u)\leqslant F(v)\quad v\in K$

II $\quad u\in K\quad (DF(u),\ v-u)\geqslant 0\quad v\in K$

III $\quad u\in K\quad (DF(v),\ v-u)\geqslant 0\quad v\in K$

且所有解 u 的集合是凸的(可能为空集)，同时若 K 闭，则解集亦闭.

证明

I⇒II：我们利用 DF 的定义，事实上，假如 u 使 F 在 K 上取极小，则对每一 $v\in K$, $t\in[0,\ \delta)$, $\delta>0$ 上实函数

$$t\to F(u+t(v-u))$$

在 $t=0$ 处取极小，因而有

$$(1)\qquad 0\leqslant\frac{d}{dt}F(u+t(v-u))\Big|_{t=0_+}=(DF(u),\ v-u)$$

(注意：这里没有用到 F 的凸性，甚至没有用到 F 在 u 达到整体极小. 上述证明实际上表明了对任意可微泛函 F 在 $u\in K$ 有局部极小，II 是必要的条件).

II⇒I：这是可微凸泛函 F 下述性质的直接推论

$$(2)\qquad F(v)\geqslant F(u)+(DF(u),\ v-u)\quad u,\ v\in X$$

(以上不等式可以证明如下：由 $t\to F(u+tv)$ 的凸性，出现在 DF 定义中的导数是 t 减少到 0 时 F 的微商的非增极限. 因此，对所有 $t>0$ 和所有 $u,\ w\in X$ 有

$$F(u+tw)-F(u)\geqslant t(DF(u),\ w),$$

取 $t=1$ 和 $w=v-u$ 给出上述(2)).

II $\Rightarrow$ III: 这是 DF 的下述基本性质的推论

$$(DF(u)-DF(v),\ u-v)\geqslant 0\quad u,\ v\in X \tag{3}$$

即 DF: $X\to X^*$ 是单调算子.

((3)容易用下述方法证明: 对给定的向量 u 和 v 利用不等式(2),再交换 v、u,然后把得到的两个不等式相加).

III $\Rightarrow$ II: 这是

$$t\to\frac{d}{dt}F(u+tw)\quad u,\ w\in X$$

的连续性,因而也是

$$t\to(DF(u+tw),\ w)\quad u,\ w\in X$$

的连续性的推论. 此连续性是实轴上可微凸函数熟知的基本性质.

事实上,我们可以用向量

$$u+t(v-u)$$

(对所有 $0\leqslant t\leqslant 1$ 此向量属于 K)代替 III 中的向量 v,得到

$$(DF(u+t(v-u)),\ v-u)\geqslant 0$$

由 $(DF(u+tw),\ w)$ 在 0^+ 的连续性, 取 $t\downarrow 0$ 时的极限得到 II. ▌

附注 6 应该指出, 上述证明中只用到 F 在点 $u\in K$ 沿任意向量 $v-u$, $v\in K$ 的右边可微性. 而在下述命题 1 的推论中,则要求 F 在 u 的可微性. ▌

命题 1 的**推论**: 在命题 1 的假设下, 属于 K 内部的向量 u 使 F 在 K 上取极小的充要条件是: u 是下述问题的解

$$(DF(u),\ w)=0\quad 对所有\ w\in X.$$

证明 见 §2 附注 3. ▌

命题1的证明所依据的 DF 的两个性质(2)与(3)刻划了凸函数的微分的特征.

事实上我们有下述引理(也见第三章附注11).

引理1 设 F 是 X 上的可微函数, $DF: X\to X^*$,则下述(i), (ii)及(iii)等价

(i) F 是凸的

(ii) $F(v)\geqslant F(u)+(DF(u),\ v-u)\quad u,\ v\in X$

(iii) DF 是单调的,即

$$(DF(u)-DF(v),\ u-v)\geqslant 0\quad u,\ v\in X.$$

证明 在命题1的证明中已证了(i)⇒(ii)⇒(iii).

(iii)⇒(ii)的证明是根据公式

$$F(v)-F(u)=(DF(u+\bar{t}(v-u)),\ v-u)\quad 0<\bar{t}<1$$

上式是将

$$\frac{d}{dt}F(u+t(v-u))=(DF(u+t(v-u)),\ v-u)$$

对 t 由0至1积分,然后用中值定理而得到的. 由 DF 的单调性,

$$(DF(u+\bar{t}(v-u))-DF(u),\ \bar{t}(v-u))\geqslant 0,$$

我们得到

$$\begin{aligned}F(v)-F(u)&=(DF(u),\ v-u)\\&\quad+(DF(u+\bar{t}(v-u))-DF(u),\ v-u)\\&\geqslant(DF(u),\ v-u).\end{aligned}$$

(ii)⇒(i): 设

$$u=\lambda v_1+(1-\lambda)v_2,\quad v_1,\ v_2\in X,\ 0<\lambda<1$$

由(ii)

$$F(v_1)\geqslant F(u)+(DF(u),\ v_1-u)$$
$$F(v_2)\geqslant F(u)+(DF(u),\ v_2-u)$$

以 λ 乘第一个不等式, $(1-\lambda)$ 乘第二个,然后相加得

$$\lambda F(v_1)+(1-\lambda)F(v_2)\geqslant F(u)$$

这就是凸性不等式. ▌

§7 单调算子和变分不等式:线性化引理

像命题 1 中 II 这类问题,称为变分不等式,即

II $\qquad u\in K:\ (Au,\ v-u)\geqslant 0\quad \forall v\in K,$

其中 K 为赋范空间 X 的凸子集, A 为 K 到 X^* 内的映射.

正如我们在引言中及迄今为止的讨论中所表明的那样,含有单调映射的变分不等式自然地同凸约束下的凸泛函的极小化问题相关联,而且两者确实具有很多相同的重要性质,即使当映射 A 不是凸泛函的微商时也是如此.

例如,无论 A 是什么样的映射,问题 II 的任何局部解,即向量 $u\in K$,使得对某个 $\delta>0$,满足

$$(Au,\ v-u)\geqslant 0\quad \forall v\in K_\delta,$$

其中 $\qquad K_\delta=K\cap\{v:\|v-u\|<\delta\},$

实际上是 II 的整体解. 〔在上述不等式中,用向量 $u+\varepsilon(v-u)$ 代替向量 v 即可得证,而对足够小的 $\varepsilon>0$, $u+\varepsilon(v-u)$ 属于 K_δ. ▌

此外,包含具有某些轻微连续性的任何单调映射的变分不等式的解,像凸极小问题的解一样,仍可以用无限个线性不等式组来描述.

事实上,假如我们检查一下命题 1 中 II⇔III 等价性的证明,我们注意仅用到映射 $A=DF$ 的下述性质(也是附注 6),也就是

$$A:\ X\to X^*$$

是单调的,即 $\quad (Au-Av,\ u-v)\geqslant 0\quad u,\ v\in X$

和半连续的(hemicontinuous),即

$$t \to (A(u+tw),\ w) \quad \text{在 } 0^+ \text{ 是连续的},\ u,\ w \in X.$$

因此,我们可以叙述以下基本引理,此引理基本上应归于 G. J. Minty[1](也可参阅 F. E. Browder[8]):

线性化引理 设 A 是赋范空间 X 到它的对偶空间 X^* 的单调、半连续映射. 则对 X 的任意凸子集 K, 下述问题 II 和 III 等价:

II $\qquad u \in K \quad (Au,\ v-u) \geqslant 0 \quad v \in K$

III $\qquad u \in K \quad (Av,\ v-u) \geqslant 0 \quad v \in K$

推论 上述问题 II 和 III 的所有解 u 的集合是凸的. 若 K 闭,则解集也是闭的.

或许问题 II"线性化"最重要的推论是与不等式 II 相反,不等式 III 在 X 的弱拓扑意义下对 u 的极限是稳定的,而前者仅当 A 有某些列紧性时才可以对 u 取弱极限. 在第三章中将给出等价的线性化问题 III 的这一性质的实质性的应用,那时我们将处理诸如 II 的变分不等式解的存在性和稳定性.

附注 7 若解 u 是 K 的内点, 例如若 $K=X$, 则 II 化为

$$u \in K \quad (Au,\ w)=0 \quad \forall w \in X$$

这是方程 $$Au=0$$

的弱形式(参看命题 1 的推论).

然而, 甚至在这种情况, 线性化引理也是有意义的, 因为它说明了这一(非线性)方程与解 u 满足的**线性**不等式组

$$(Av,\ v-u) \geqslant 0 \quad \forall v \in X$$

的等价性. ▌

附注 8 由 T. Kato[1] 得到的一个有兴趣的结果证实: 在 Banach 空间 X 的一凸**开**区域上的单调半连续 (hemicontinuity)映射总是半连续(demicontinuous)的, 即从 X 的强

拓扑到 X^* 的弱拓扑的连续性当我们想到情形 $A=DF$, F 是可微凸泛函,那末对这一性质可能是不会感到很惊奇的). 然而,我们要说明的是,等价性 II⇔III 实际上要求的仅是在集合 K 上而不是在整个 X 上 A 的单调性和半连续性(hemicontinuity),一般地讲在凸子集 K 上 hemicontinuity 是比 demicontinuity 弱的性质. 关于单调算子的有界性也可见 F. E. Browder[3] 和 R. T. Rockafellar[4]. ▌

附注 9 假如 $A=DF$, F 是 X 上的可微凸泛函, 则对 X 中向量的任意有限集合

$$v_0,\ v_1,\ \cdots,\ v_n$$

我们有

$$\begin{aligned}
F(v_1) &\geqslant F(v_0)+(DF(v_0),\ v_1-v_0)\\
F(v_2) &\geqslant F(v_1)+(DF(v_1),\ v_2-v_1)\\
&\cdots\cdots\\
F(v_n) &\geqslant F(v_{n-1})+(DF(v_{n-1}),\ v_n-v_{n-1})\\
F(v_0) &\geqslant F(v_n)+(DF(v_n),\ v_0-v_n)
\end{aligned}$$

(见 § 6, (2)),将所有这些不等式相加得

$$\begin{aligned}
0\geqslant (DF(v_0),\ v_1-v_0)+(DF(v_1),\ v_2-v_1)+\cdots\\
+(DF(v_{n-1}),\ v_n-v_0)+(DF(v_n),\ v_0-v_n)
\end{aligned}$$

因此,映射 $A=DF$ 不仅满足单调性条件,而且也满足整个"循环"不等式族,其中每一个对应于 X 的有限子集: 映射 DF **是循环单调的**. 正如 Rockafellar 所指出的,这一性质是刻划单调映射(它是凸泛函的微商)的基本性质(见 R. T. Rockafellar[1]).

§ 8 变分不等式和不动点

我们现在回过来讨论变分不等式和不动点之间的关系.

虽然将一般的变分不等式化成不动点的提法可以在任何一个光滑的赋范 Banach 空间中实现（见下面附注 13），为简单起见，我们仍假定我们的问题是在 Hilbert 空间中讨论的.

我们将使用以下两个工具，它们依赖于给定的 Hilbert 空间 V 的指定的内积，而不仅仅依赖于由它诱导的拓扑：

（i）V 到 V^* 上的对偶 Riesz 同构 J.

（ii）在凸集 K 上 Riesz 投影 P_K 的弱特征.

Riesz 同构 J：

若 V 为(实) Hilbert 空间，V^* 为它的对偶，(v^*, v) 为 $\in V$ 和 $v^*\in V^*$ 所成的对偶积，$(u|v)$ 为 V 中的内积，则

$$J: V\to V^*$$

为由恒等式

$$(Ju, v)=(u|v) \quad u, v\in V$$

定义的映射. 映射 J 是 V 到 V^* 上的(等距)同构.

我们可以用 J 的逆

$$J^{-1}: V^*\to V$$

$$(v^*, v)=(J^{-1}v^*|v) \quad v\in V, v^*\in V^*,$$

通过映射

$$\mathscr{A}\equiv J^{-1}A: V\to V$$

$$(\mathscr{A}u, v)=(\mathscr{A}u|v) \quad u, v\in V$$

来表示任意给定的映射

$$A: V\to V^*.$$

附注 10 若 $A=DF$，F 是 V 上的可微实值泛函，则 $\mathscr{A}=J^{-1}A$ 是 F 的梯度 ∇F：

$$(DF(u), v)=(\nabla F(u)|v) \quad u, v\in V \quad ∎$$

Riesz 投影 P_K：

若 K 是 V 的凸子集，且 $z\in V$，则向量

$$u=P_Kz$$

由极小问题

$$u \in K: \ \|u-z\| \leqslant \|v-z\| \quad \forall v \in K$$

的唯一解(假如它存在的话)来定义,其中 $\|w\|=(w|w)^{1/2}$.

下面结果是众所周知并且可用V中的平行四边形公式初等地证明. 倘若 K 是闭的, 则 V 中的任意向量 z 在 K 上必有投影 $u=P_K z$.

下面结果也是显然的,向量 u 是上述极小问题的解,当且仅当 u 是问题

$$u \in K: \ \frac{1}{2}\|u-z\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|v-z\|^2 \quad \forall v \in K$$

的解.

引理 2 设 K 是 Hilbert 空间 V 的凸子集. 则给定 $z \in V$, 我们有

$$u=P_K z,$$

当且仅当 $\quad u \in K \quad (u-z|v-u) \geqslant 0 \quad \forall v \in K.$

证明 泛函

$$F(v)=\frac{1}{2}\|v-z\|^2=\frac{1}{2}(v-z|v-z)$$

在 V 上是可微的,有

$$DF(u)=J(u-z)$$

(即 $\nabla F=I-z$, $I \equiv V$ 上的恒等映射)

因此,

$$(DF(u),\ v-u)=(J(u-z),\ v-u)=(u-z|v-u).$$

引理作为命题 1 等价性 I⇔II 的特殊情况而得到. ∎

P_K 的弱描述形式对于证明 P_K 不使距离增加是有用的, 这个性质以后将会用到.

引理 2 的推论 P_K 是非扩张的,即

$$\|P_K z_1-P_K z_2\| \leqslant \|z_1-z_2\|, \quad z_1,\ z_2 \in V.$$

证明 让我们写出

$$u_1 = P_K z_1 \quad 和 \quad u_2 = P_K z_2$$

的弱描述形式，即

$$(u_1 - z_1 | v - u_1) \geqslant 0 \quad \forall v \in K$$

$$(u_2 - z_2 | v - u_2) \geqslant 0 \quad \forall v \in K$$

在第一个不等式中取 $v = u_2$，后一个不等式中取 $v = u_1$，相加得

$$(u_1 - z_1 - u_2 + z_2 | u_2 - u_1) \geqslant 0$$

即
$$(u_1 - u_2 | u_1 - u_2) \leqslant (z_1 - z_2 | u_1 - u_2)$$

用 Schwarz 不等式，即得

$$\|u_1 - u_2\| \leqslant \|z_1 - z_2\| \quad]$$

现在我们已作好了准备来证明 §4 中概略地叙述过的变分不等式的不动点描述.

命题 2 设 K 是 Hilbert 空间 V 中的凸集，A 是 K 到 V 内的映射，则以下 II 和 IV 是等价的：

II $\qquad u \in K: \ (Au, v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in K$

IV $\qquad u = P_K[I - \rho J^{-1} A] u, \quad \rho > 0$

其中 I 是 V 上的恒等映射，J^{-1} 是 V^* 到 V 上的典则同构.

附注 11 用映射 $\mathscr{A} = J^{-1} A$，II 和 IV 可以分别写作

$$u \in K: \ (\mathscr{A} u | v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in K$$

和
$$u = P_K(I - \rho \mathscr{A}) u, \quad \rho > 0 \quad]$$

命题 2 的证明 这只要写出

$$u = P_K z, \quad z = u - \rho J^{-1} A u$$

的弱描述形式就够了. 事实上，我们有

$$u \in K: \ (u - (u - \rho J^{-1} A u) | v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in K$$

因为 $\rho > 0$，就有

$$u \in K: \ (J^{-1} A u | v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in K$$

其中
$$(J^{-1} A u | v - u) = (Au, v - u) \quad]$$

附注 12 问题 II 的不动点描述 IV 不是本质性的：假如我们将 V 的一种内积改变成另一种等价的内积，则 V 的对偶 V^*，因而 A 和问题 II 都是不变的，而 P_K 和 $\mathscr{A}=J^{-1}A$ 将改变. 内积的选择还将影响使映射 $P_K(I-\rho\mathscr{A})$ 成为 V 中的压缩映射的 ρ 值的范围(见附注 5).

在下一章中我们还会讨论这个问题，那时我们将讨论问题 II 的迭代解法. ∎

附注 13 Riesz 投影 P_K 的弱描述形式，因而上述命题 2 在任意 Banach 空间 X 中都成立，它的模是 Gateaux 可微的(从原点向外). 在这种情况下我们可以取 J 为 X 的任意**对偶映射**，即

$$J=D\varphi(\|\cdot\|)$$

其中 φ 是模的适当的连续增加函数$\left(\text{上面我们已选 } \varphi(r)=\frac{1}{2}r^2\right)$. 关于对偶映射的更详细的讨论见 A. Beurling-A. E. Livingstone[1], F. E. Browder[4], [7], E. Asplund[1]. ∎

附注 14 命题 2 表明变分不等式总可以化为不动点问题. 然而反过来也是可能的. 确实，一个向量 u 是映射

$$U:\ K\to K$$

的不动点，当且仅当 u 是变分不等式

$$u\in K\quad (\mathscr{A}u|v-u)\geqslant 0\quad \forall v\in K$$

的解，其中

$$\mathscr{A}=I-U.$$

事实上，将 $v=Uu$ 代入上述不等式中，得

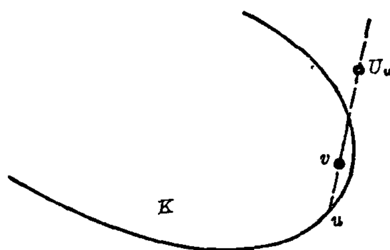
$$-\|u-Uu\|^2\geqslant 0,\quad \text{即}\quad Uu=u.$$

我们还要指出，假如 U 是 K 到 V 的映射，使得对任意 $u\in K$，存在一向量 $v\in K$，有

$$Uu-u=\lambda(v-u),\quad \lambda>0$$

则可以得到同样的结论.

这种所谓内向映射的不动点以及外向映射(在上述条件中 $\lambda<0$)的不动点已被 F. E. Browder[11], [14] 用变分不等式的方法研究过. ▮



附注 15 命题 2 实质上是属于H. Brezis[2]的. 然而应该指出, 对 Hilbert 空间中的双线性型, 变分不等式和不动点之间的联系在 G. Stampacchia[1] 和 J. L. Lions-G. Stampacchia[1] 早先的理论中已出现. 这些作者得到存在性结果事实上是基于迭代法和将问题化为适当的压缩映射的不动点问题. 在下一章中我们将更详细地处理这种情况. ▮

§9 不可微泛函的极小化和混合变分不等式

让我们回到赋范空间 X 中凸子集 K 上凸泛函 F 的极小问题, 现在去掉 § 6 中 F 可微的假定. 确实, 正如我们以后将要看到的, 很多应用中产生的变分问题导致泛函的极小, 此泛函是以可微的 F 及不可微的 G 之和的形式出现的.

在允许泛函 G 取 $+\infty$ 值时, 可以假定约束集 K 的指示函数 ρ_K 已经预先合并到泛函的不可微部分中去了.

让我们回想一下 ρ_K 是下式确定的 X 上的泛函

$$\begin{aligned}\rho_K(v)&=0 \qquad \text{若 } v\in K\\ &=+\infty \quad \text{若 } v\notin K\end{aligned}$$

显然, $F+G$ 在 X 上的极小化与 $F+G$ 在 X 的子集

$$K\equiv \mathrm{dom}\, G\equiv\{v: G(v)<+\infty\}$$

上的极小化是同一回事($\mathrm{dom}\, G$ 也称为 $G: X\to(-\infty, +\infty)$ 的有效区域).

§6的命题1可以推广如下:

命题3 设 $F: X\to R$ 是一可微凸泛函, $G: X\to(-\infty, +\infty]$ 是凸的, $G\not\equiv+\infty$, 则以下 I′ 和 II′ 等价

I′ $\quad u\in X: F(u)+G(u)\leqslant F(v)+G(v) \quad \forall v\in X$

II′ $\quad u\in X: (DF(u), v-u)\geqslant G(u)-G(v) \quad \forall v\in X.$

证明 (见 M. Sibony[1]) 若 I′ 成立, 对 X 的每个 v 和所有 t, $0<t<1$, 我们有

$$F(u)+G(u)\leqslant F(u+t(v-u))+G(u+t(v-u))$$
$$\leqslant F(u+t(v-u))+(1-t)G(u)+tG(v),$$

这里用到 G 的凸性. 因 $F(u)<+\infty$, 以上不等式化为

$$t^{-1}[F(u+t(v-u))-F(u)]\geqslant G(u)-G(v)$$

由于 F 的可微性, 当 $t\downarrow 0$ 时得到 II′.

为了证明 II′⇒I′, 只需用以下不等式

$$F(v)\geqslant F(u)+(DF(u), v-u) \quad v\in X,$$

此不等式是 F 凸性的推论. ∎

附注16 正如上述证明所表明的, 使 $F+G$ 取极小的向量 u 总是满足不等式 II′, 即使可微泛函 F 不是凸的. ∎

考察上述不等式 II′ 的另一个途径是把它当作极小问题直接形式和弱形式的统一.

事实上, 当 $F\equiv 0$, II′ 显然化为问题

$$u\in X: G(u)\leqslant G(v) \quad \forall v\in X$$

另一方面, 容易证明当 G 取集合 K 的指示函数时, II′ 等价于变分不等式

$$u\in K: (DF(u), v-u)\geqslant 0 \quad \forall v\in K.$$

类似地，我们可以用引入以下形式的不等式

II''　　$u\in X$: $(Au,\ v-u)\geqslant F(u)-F(v),\quad \forall v\in X$

其中 A: $X\to X^*$, F: $X\to(-\infty,\ +\infty]$，来推广前面所讨论的直接极小问题和变分不等式.

然而，结果是这样的"混合"变分不等式仅仅表面上比原来的更一般些.

事实上，用§5中讨论的上图形式，我们可以将上述问题 II'' 等价地写作和以前考虑的变分不等式一样的变分不等式. 事实上，现在我们考虑乘积空间

$$\widetilde{X}=X\times R$$

和不等式:

$\widetilde{\mathrm{II}}$　　$\tilde{u}\in\widetilde{K}$: $(\widetilde{A}\tilde{u},\ \tilde{v}-\tilde{u})\geqslant 0\quad \forall\tilde{v}\in\widetilde{K}$

其中 $\widetilde{A}$ 是 $\widetilde{X}$ 到它的对偶 $\widetilde{X}^*=X^*\times R$ 的映射 $A\times 1$，即

$$\widetilde{A}([v,\ \beta])=[Av,\ 1]\quad v\in X,\ \beta\in R$$

$\widetilde{K}$ 是 F 的上图

$$\widetilde{K}=\operatorname{epi}F=\{[v,\ \beta]\in X\times R,\ F(v)\leqslant\beta\}.$$

以下引理成立

引理3　设 A: $X\to X^*$, F: $X\to(-\infty,+\infty]$, $F\not\equiv+\infty$，则 X 中的向量 u 是上述问题 II'' 的解且 $F(u)=\alpha,\ \alpha\in R$，当且仅当 $\widetilde{X}$ 中的向量 $\tilde{u}=[u,\ \alpha]$ 是问题 $\widetilde{\mathrm{II}}$ 的解.

证明　若 u 是 II'' 的解，则对每个 $\beta\geqslant F(v)$ 有

$$\begin{aligned}0&\leqslant(Au,\ v-u)+F(v)-F(u)\\&=(Au,\ v-u)+1\cdot(\beta-F(u))\\&=(\widetilde{A}\tilde{u},\ \tilde{v}-\tilde{u})\end{aligned}$$

其中 $\tilde{u}=[u,\ F(u)]$, $\tilde{v}=[v,\ \beta]$，因而 $\widetilde{\mathrm{II}}$ 成立.

反之，若 $\tilde{u}=[u,\ \alpha]$ 是 $\widetilde{\mathrm{II}}$ 的解，则 $\alpha\geqslant F(u)$，且对所有满足 $\beta\geqslant F(v)$ 的 $\tilde{v}=[v,\ \beta]$（注意当 $F(v)=+\infty$ 时，II'' 的不

等式平凡地满足)有

$$0\leqslant(\tilde{A}\tilde{u},\ \tilde{v}-\tilde{u})=(Au,\ v-u)+\beta-\alpha$$

因而，取 $v=u$ 和 $\beta=F(u)$，我们特别得到 $\alpha\leqslant\beta=F(u)$，因此

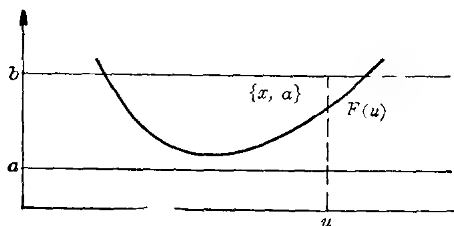
$$\alpha=F(u),$$

而且对所有 $\beta\geqslant F(v)$

$$0\leqslant(Au,\ v-u)+\beta-F(u)$$

当 $\beta=F(v)$ 时，得到 u 满足 II″. ∎

附注 17 若现在假定向量 $\tilde{u}=[u,\ \alpha]$ 是问题 $\widetilde{\mathrm{II}}$ 将 $\widetilde{K}$ 用 $\widetilde{K}$ 与"带" $X\times I$ 的交集 $\widetilde{K}'$ 代替后的解，其中 $I=[a,\ b]$，$a\leqslant\inf F$，



则仍可以得出结论：u 是问题

$$u\in X:\ (Au,\ v-u)\geqslant F(u)-F(v),\quad \forall v\in X,\ F(v)<b$$

的解，且 $\alpha=F(u)$.

我们以后将用到这一事实.

附注 18 对于不可微凸泛函极小化的一个不同方法是采用 F 的**次微分**(Subdifferential)∂F 取代微分 DF 的作用. 我们记住一般说来 ∂F 是 X 到 2^{X^*} 内的多值映射，这个映射使 X 中每个 u 与 F 在 u 的所有**次梯度**(Subgradients) u^* 的集合(可能为空集)相关联，所谓次梯度 $u^*\in X^*$ 是指使得 $v\to F(u)+(u^*,\ v-u)$ 确定了 F 在 u 的一个支撑超平面(与 F

不必相切于一点）．换句话说，对于每个 $u\in X$

$$\partial F(u)=\{u^*\in X^*;\ F(v)\geqslant F(u)+(u^*,\ v-u),\ \forall v\in X\}.$$

应当注意的是到目前为止我们所作出的关于向量 $u=DF(u)$ 的全部描述，只是把 u 作为 F 的次梯度，这个方法自然地导致到包含有多值单调映射的变分不等式．这方面可以参看 F. E. Browder [14]，R. T. Rockafellar [6]．]

* * *

关于凸函数理论一般性的参考文献，我们在这里仅提到 R. T. Rockafellar [7]，J. Stoer 和 C. Witzgall [1]，J. J. Moreau [1]，A. Ioffe–V. Tikhomirov [1]．

Hilbert 空间或 Banach 空间中算子的单调性曾被以下作者研究过：M. M. Vainberg 和 R. I. Kachurovskii [1]，R. I. Kachurovskii [1] [2]，E. H. Zarantonello [1]，G. J. Minty [1]，[2]，[3]，F. E. B. [15] 中引用的 F. E. Browder 的文献，T. Kato [1]，R. T. Rockafellar [3] [4] 等等．关于理论方面的更多的文献和概述以及它的应用可以在 R. I. Kachurovskii [3] 和 F. E. Browder 的上述引文中找到．

在下一章中还将给出关于变分不等式的参考文献．

第 二 章

某些典型问题及存在定理

考虑如下的变分不等式

II $\qquad u \in K$: $(Au, v-u) \geqslant 0$ 对所有 $v \in K$,

其中 K 是赋范空间 X 的一个凸子集, A 是 K 到 X^* 中的一个单调映射. 其解的存在性及求逼近解的方法, 本质上基于前一章中讨论过的问题 II 的各种等价表示形式.

事实上, 建立存在性及逼近理论的三种主要思想可归纳如下:

(i) 将 II 归结为一个不动点问题, 然后利用不动点定理, 诸如 Brouwer 或者 Schauder 定理, 或者更加构造性地可利用压缩原理, 后者同时产生求逼近解的一个迭代算法;

(ii) 将 II 归结为直接极小问题(当映射 A 是某个凸泛函 F 的微分时), 这样就可应用变分法的经典存在定理. 求逼近解可利用 Ritz 型的有限维逼近及有限维凸优化的方法;

(iii) 先将 II 限制在 X 的有限维子空间中, 这时求解可利用前面的任何一种方法, 然后将问题线性化来获得全空间上的解. 这一方法仍是来源于组合 Ritz-Galerkin 型的有限维离散和迭代算法或求解有限维逼近问题的凸优化的方法.

本章中, 按照(i)及(ii)中所述的线索, 给出一些存在性及逼近的结果, 而基于第一章的线性化引理的更一般的存在性定理及离散过程的描述将放到下面第三章中讲.

此外，至今在抽象框架下讨论的所有问题的实际背景，我们将在下面叙述一些极小化问题和含有积分原函数及偏微分算子的变分不等式的典型例子. 大多数的问题出自具有单边约束的物理系统的平衡问题的数学描述.

如在本讲义的所有地方一样，我们将限于椭圆型的定常问题，而关于发展型的变分不等式可参考 J. L. Lions 和 R. Glowinski 关于这方面的文献.

§1 某些变分不等式

在本节中，以 Ω 表示 n-维欧氏空间 E^n 的一个有界开子集，以 Γ 表示其边界.

我们用一个完全经典的问题，即不含有单边约束，作为第一个例子.

例 1 Dirichlet 问题：

$$(1)\qquad \begin{cases} -\Delta u=f & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ u=0 & \text{在 } \Gamma \text{ 上} \end{cases}$$

其中 $-\Delta$ 是 Laplace 算子，f 是 Ω 上的一个给定函数，比如说 $f\in L^2(\Omega)$.

(1) 的变分(或弱)解是使下述能量积分

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dx-\int_{\Omega} fv\,dx$$

在 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$ 上为极小的函数 u，这正是经典的 Dirichlet 原理.

〔空间 $H_0^1(\Omega)$ 由所有这样的 $v\in L^2(\Omega)$ 所组成，它的广义导数 $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$, $i=1, \cdots, n$ 仍属于 $L^2(\Omega)$，而且它在边界 Γ 上的迹为零. 规定其范数为

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)}=\left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{i=1}^n\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2},$$

$H_0^1(\Omega)$ 是一个自反的 Banach 空间，它的对偶空间

$$H^{-1}(\Omega)$$

可等同于 Ω 上的所有广义函数 T，它可以写成(不是唯一的

$$T=g_0-\sum_{i=1}^n\frac{\partial g_i}{\partial x_i},\quad g_0,\ g_i\in L^2(\Omega),$$

$v\in H_0^1(\Omega)$ 和 $T\in H^{-1}(\Omega)$ 之间的对偶积为

$$(T,\ v)=\int_\Omega g_0v\,dx+\sum_{i=1}^n\int_\Omega g_i\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx.\ \blacksquare$$

泛函
$$F_0(v)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int_\Omega\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2dx$$

在 $H_0^1(\Omega)$ 上可微，其微分

$$DF_0\equiv-\Delta:\ H_0^1(\Omega)\mapsto H^{-1}(\Omega)$$

为

$$(-\Delta u,\ v)=\frac{d}{dt}F_0(u+tv)\big|_{t=0}$$

$$=\sum_{i=1}^n\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx,\quad u,\ v\in H_0^1(\Omega).$$

上面的等式确实提供了 Laplace 算子

$$-\Delta=-\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

的变分定义，而右边的双线性型

(2)
$$a(u,\ v)=\sum_{i=1}^n\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx$$

称为 **Dirichlet 型**.

那末，由第一章命题 1 的推论可见，Dirichlet 问题的变分解，即是下述问题的解：

$u\in H_0^1(\Omega)$：$a(u,\ v)=(f,\ v)$ 对所有 $v\in H_0^1(\Omega)$.

至于 u 的存在性，这只要证明上面能量积分在 $H_0^1(\Omega)$ 中

达到其最小值，例如，这可利用在本章 §4 中将要给出的最小值存在的一般定理而获得证明.

附注 1 在上面问题中，代替 Laplace 算子 $-\Delta$，而考虑任何二阶椭圆型偏微分算子

$$L(v)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right),$$

其中 $a_{ij}(x)$ 是 Ω 上的有界可测函数，且满足椭圆性条件

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant c|\xi|^2,\quad c>0, \text{对所有}\ \xi\equiv(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in R^n,$$

此时，只要在问题(2)中代替 Dirichlet 型，以

$$a(u,\ v)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx.$$

但是，这个推广的形式不是泛函

$$\frac{1}{2}a(v,\ v)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_{\Omega}a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx$$

的微分，除非它是**对称的**，即系数 a_{ij} 满足

$$a_{ij}(x)=a_{ji}(x)\quad \text{a. e.}\ \forall i,\ j=1,\ \cdots,\ n.$$

这个推广的 Dirichlet 问题的解的存在性证明，不能像前面那样利用直接变分形式得到. 我们必须求助于著名的 Lax-Milgram 定理，在后面将讲到. ▌

本文中我们将要讨论的变分不等式的存在定理，实际上首先是将 Lax-Milgram 定理推广到含有单边约束的问题.

这一类问题的最简单例子是

例 2 容量问题(Capacity problem)：

给定一个列紧子集 $E\subset\Omega$，求函数 u 使得 Dirichlet 积分 $F_0(v)$ 在所有 $v\in H_0^1(\Omega)$，且使得在 $H_0^1(\Omega)$ 的意义下，在 E 上 $v\geqslant1$ 的锥上为最小.

〔如果 v 是在 E 上 $\geqslant1$ 的光滑函数序列在 $H_0^1(\Omega)$ 模下

的极限我们称在 $H_0^1(\Omega)$ 的意义下，在 E 上 $v\geqslant 1$.]

因此，我们的问题现在是

$$(3)\quad \begin{cases} u\in H_0^1(\Omega), & u\geqslant 1 \text{ 在 } E \text{ 上;} \\ F_0(u)\leqslant F_0(v) & \forall v\in H_0^1(\Omega),\ v\geqslant 1 \text{ 在 } E \text{ 上.} \end{cases}$$

解 u 称为**平衡位势**，泛函的最小值是集合 E 的**容量**.

利用第一章命题 1，可见(3)的解可由下面变分不等式来刻划

$$(4)\quad \begin{cases} u\in H_0^1(\Omega), & u\geqslant 1 \text{ 在 } E \text{ 上;} \\ a(u,\ v-u)\geqslant 0 & \forall v\in H_0^1(\Omega),\ v\geqslant 1 \text{ 在 } E \text{ 上} \end{cases}$$

其中 $a(u,\ v)$ 是 Dirichlet 型(2).

附注 2 当 $a(u,\ v)$ 是对应于**非对称**椭圆算子 L 的推广的 Dirichlet 形式，如在例 1 中那样，则变分不等式(4)是容量问题唯一可能的表示形式. 在这种情形中，(4)必须作为同算子 L 相关的，在 E 上的平衡位势的定义.

对于非对称二阶椭圆偏微分算子的容量理论始于 G. Stampacchia[1]，而他处理这个问题的变分不等式，由 J. L. Lions 和 G. Stampacchia [1] 扩充到具有单边约束的其他变分问题，包括定常的及发展型的. 产生于物理及工程中的许多其他问题，从那时起已为许多作者当作变分不等式理论来进行研究. 这方面的主要参考文献是 C. Duvaut 和 J. L. Lions[1].

我们还要指出，力学及流体动力学的许多单边问题也为 J. J. Moreau[3]，用凸分析的方法进行研究.]

例 3 “障碍”问题

现在，我们要在属于 $H_0^1(\Omega)$，且在 Ω 中几乎处处大于或等于一个事先给定的函数 ψ 的所有函数 v 所组成的锥上，求 Dirichlet 积分极小. 函数 ψ 称为障碍，而假设 ψ 使得刚才定

义的锥是非空的．例如，我们可设 $\psi\in H^1(\Omega)$〔即 $\psi\in L^2(\Omega)$ 且 ψ 的所有广义导数 $\psi_{x_i}\in L^2(\Omega)$〕，$\psi$ 在 Γ 上的迹是 $\leqslant 0$ a. e.

最小化的 u 是下述变分不等式的解

$$(5)\quad \begin{cases} u\in H_0^1(\Omega), \quad u\geqslant\psi \text{ a. e. 在 } \Omega \text{ 中}; \\ a(u,\ v-u)\geqslant 0 \quad \forall v\in H_0^1(\Omega),\ v\geqslant\psi \text{ a. e. 在 } \Omega \text{ 中}. \end{cases}$$

可以证明，如果 I 是 Ω 的一个闭子集，在 I 上 $u=\psi$，则解 u 满足条件

$$u\geqslant\psi \text{ a. e.} \quad \text{且 } -\Delta u\geqslant 0 \text{ 在 } \Omega \text{ 中},$$

$$u=\psi \text{ 在 } I \text{ 上} \quad \text{且 } -\Delta u=0 \text{ 在 } \Omega-I \text{ 中}.$$

这样，在整个 Ω 上，u 是上调和的；而在集 I 之外 u 是调和的；在 I 上，u 同障碍相接触．

包括容量问题在内的一个类似的问题，是在使得只在 Ω 的一个给定的列紧子集 E 上 $\geqslant\psi$ 的所有函数 v 上，求 F_0 的极小(这里在 E 上 $v\geqslant\psi$，有同在例 2 中，在 E 上 $v\geqslant 1$ 类似的意义)．如果 E 是 Ω 中的一个 $(n-1)$-维流型，那末所处理的问题称为“薄障碍”(thin obstacle)问题．

这类问题首先为 J. L. Lions 和 G. Stampacchia [1] 所考虑．关于解的正则性也已为许多作者所研究，可见 H. Lewy 和 G. Stampacchia [1]，[2]，[3]，H. Brezis 和 G. Stampacchia [1]，H. Lewy [1]，[2]，H. Brezis [5]，G. Stampacchia [2]，[3]，[4]．最近 C. Baiocchi [1] 已把它应用到水力学中．

例 4 “边界障碍”问题

现在的问题是求泛函

$$F(v)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dx-\int_\Omega f v\,dx$$

的极小其中 f 是给定在 Ω 上的函数，$f\in L^2(\Omega)$，在所有

$v\in H^1(\Omega)$ 的锥上并满足

$$v\geqslant h \quad \text{a. e. 在 } \Gamma \text{ 上}.$$

h 是在 Γ 上预先指定的一个函数.

可以看出，解 u 所满足的相应的变分不等式，对应于在边界 Γ 上具有单边约束的，Laplace 算子 $-\Delta$ 的一个边值问题。形式上，可表示如下

$$(6)\quad \begin{cases} -\Delta u=f & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u-h\geqslant 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\geqslant 0,\ (u-h)\dfrac{\partial u}{\partial n}=0 & \text{a. e 在 } \Gamma \text{ 上}. \end{cases}$$

这个例子的详细讨论可在 G. Duvaut 和 J. L. Lions[1] 中找到. 这里只是按照 J. L. Lions, R. Glowinski 和 R. Tremoliers[1] 指出条件(6)可解释为，薄膜 Γ 所包围的区域 Ω 中流体的定常平衡，其中 Γ 容许流体流入 Ω，但禁止流出 Ω.

如果 $u(x)$ 是 Ω 内流体的压力，$h(x)$ 是作用在 Γ 上的外压力，当流体流入时 $\dfrac{\partial u}{\partial n}\geqslant 0$，而在 Γ 上 $u=h$; 另一方面，如果 $u>h$，则流体要流出去，但是由于 Γ 禁止流出，因此 $\dfrac{\partial u}{\partial n}=0$. 解 u 的正则性质已被研究，可见 H. Brezis-G. Stampacchia [1], H. Brezis[5], H. de Veiga[1], [2] 等文.

例 5 非线性弹性力学中的一个问题

现在求能量积分

$$F(v)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dx-\int_{\Omega} f v\, dx,$$

在使得 $v\in H_0^1(\Omega)$ 且

$$(7)\qquad |\operatorname{grad} v|\leqslant 1 \quad \text{a. e. 在 } \Omega \text{ 中}$$

的所有 v 的凸集上极小.

这个问题出现在杆的弹塑性扭转中，这已被许多作者所研究，特别可见 B. D. Annin[1], H. Lanchon 和 C. Duvaut [1], H. Lanchon[1], T. W. Ting[1], 而在 C. Duvaut-J. L. Lions[1], 从中可找到更多的材料.

刻划解 u 的变分不等式，形式上可解释如下：在 Ω 中存在一个"塑性区域" Ω_0, 其内

$$|\operatorname{grad} u|=1;$$

在 Ω_0 之外，即在 $\Omega-\Omega_0$ 中

$$|\operatorname{grad} u|<1,$$

函数 u 满足方程

$$-\Delta u=f;$$

而且，在 Ω_0 与 $\Omega-\Omega_0$ 的交接面处，函数 u 及其导数 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 满足某些接触条件. 像障碍问题一样，这也是一个自由边界问题.

这个问题也可等价地叙述成"双边障碍"问题，即上面的条件(7)可代之以下面的条件：

$$\psi_1\leqslant v\leqslant\psi_2 \quad \text{a. e. 在 } \Omega \text{ 中},$$

其中 ψ_1 和 ψ_2 是两个适当的函数. 关于这点更详细了解可参考上面所引述的 T. W. Ting 的文章及 H. Brezis-M. Sibony [2].

解的正则性质已为上面所引述的 H. Brezis-G. Stampacchia 的文章所研究；也可看 H. Brezis[5]. 关于这个问题的数值解可见 R. Glowinski[3], J. F. Bourgat[1], M. Nedelec [1], M. Goursat[1], M. Sibony[2].

例 6 Bingham 流动

用直接变分形式，求不可微泛函

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2dx-\int_\Omega fv\,dx+g\int_\Omega|\operatorname{grad} v|\,dx, \qquad g>0,$$

在空间 $H_0^1(\Omega)$ 上的极小.

上面的泛函是出现在例 5 中同样的能量积分 $F(v)$，其在 $H_0^1(\Omega)$ 上显然可微，加上不可微项

$$G(v)=g\int_\Omega |\text{grad}\, v|\,dx.$$

由第一章命题 3，最小化的 u 可由混合变分不等式来刻划

$$u\in H_0^1(\Omega):\ a(u,\ v-u)\geqslant G(u)-G(v),\quad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

其中 $$a(u,\ v)=\sum_{i=1}^n\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx-\int_\Omega fv\,dx.$$

数值解可见 R. Glowinski[1], M. Goursat[1].

这个问题的物理背景及解 u 的性质的详细讨论. 可在上面所引的 C. Duvaut-J. L. Lions 的书中找到.

例 7 边界有摩擦的弹性力学问题

含有一个不可微泛函的另一个问题是，求泛函

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int_\Omega\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2dx+\int_\Omega|v|^2dx-\int_\Omega fv\,dx+c\int_\Gamma|v|\,d\Gamma$$

在全空间 $H^1(\Omega)$ 上的极小. 不可微项是边界积分

$$G(v)=c\int_\Gamma|v|\,d\Gamma,$$

而像例 6 中一样，解 u 可由下述混合变分不等式来刻划

$$u\in H^1(\Omega):\ a(u,\ v-u)\geqslant G(u)-G(v)\quad \forall v\in H^1(\Omega),$$

其中 $$a(u,\ v)=\sum_{i=1}^n\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx+\int_\Omega uv\,dx-\int_\Omega fv\,dx.$$

这类问题出现在具有单边边界约束的弹性体理论中. 这可参考上面所引述的 C. Duvaut-J. L. Lions 或 J. L. Lions, R. Glowinski 和 R. Tremoliers 的书.

例 8 含有 Laplaco 算子非线性推广的不等式

此地考虑的所有问题的推广，从数学观点来看是相当自然的，虽则没有直接的物理意义，它们是代替 Dirichlet 积分以泛函

$$F(v)=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^p dx.$$

对每个 $p\geqslant 2$，这确实是在 Sobolev 空间

$$H^{1,p}(\Omega)=\{v\in L^p(\Omega),\ v_{x_i}\in L^p(\Omega),\ i=1,\ \cdots,\ n\}$$

上一个可微的凸泛函，而其微分是从 $H^{1,p}(\Omega)$ 到其对偶空间的单调算子

$$Au=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \tag{8}$$

对应的型是

$$a(u,\ v)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx.$$

〔事实上，有

$$\begin{aligned}(DF(u),\ v)&=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}|u_{x_i}+tv_{x_i}|^p dx\right]_{t=0}\\&=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}|u_{x_i}+tv_{x_i}|^{p-2}(u_{x_i}+tv_{x_i})v_{x_i}dx\Big|_{t=0}\\&=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}v_{x_i}dx.\end{aligned}$$
〕

Dirichlet 积分另一种自然的推广是

$$F(v)=\frac{1}{p}\int_{\Omega}|\operatorname{grad} v|^p dx,$$

它的微分是算子

$$Av=-\operatorname{div}(|\operatorname{grad} v|^{p-2}\operatorname{grad} v).$$

像算子(8)一样，当 $p=2$ 时这个算子显然导致 $-\Delta$. 因此，它们二者可视作 Laplace 算子的自然的非线性推广.

还应当指出，这些算子是具有适当范数的空间 $H^{1,p}(\Omega)$

的全部对偶映射，请参照第一章§8附注12.

例 9 含有更一般非线性二阶椭圆偏微分算子的不等式.

考虑

$$a(u,\ v)=\int_{\Omega}a_0(x;\ u,\ u_x)v\,dx+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}a_i(x;u,\ u_x)v_{x_i}dx$$

$$u_x\equiv(u_{x_1},\ \cdots,\ u_{x_n}),$$

其中函数

$$a_i(x;\xi)=a_i(x;\ \xi_0,\ \xi_1,\ \cdots,\ \xi_n),$$

$$x\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}^{n+1},\ i=0,\ \cdots,\ n,$$

对固定的 ξ，是 x 的可测函数；而对固定的 x，是 ξ 的连续函数.

如果函数 $a_i(x;\ \xi)$，在 ξ 为 ∞ 处具有多项式的增长，即

$$|a_i(x;\ \xi)|\leqslant c(1+|\xi|^{p-1}),\tag{9}$$

$$x\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}^{n+1},\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ n$$

其中 p：$1<p<+\infty$，$c>0$，则容易证明对 Sobolev 空间 $H^{1,p}(\Omega)$ 的每一个函数 u，有

$$a_i(x;\ u,\ u_x)\in L^{p'}(\Omega),\quad p'=p/(p-1)$$

且有估计

$$|a(u,\ v)|\leqslant\gamma(\|u\|_{1,p})\|v\|_{1,p},\quad u,\ v\in H^{1,p}(\Omega)$$

成立，其中 $\gamma(r)$ 是 $r>0$ 的连续函数，$\|\cdot\|_{1,p}$ 是 $H^{1,p}(\Omega)$ 中的范数.

〔如果考虑到 Sobolev 嵌入定理，增长条件(9)显然可以减弱，见下面引用的参考文献.〕

因此，等式

$$(Au,\ v)=a(u,\ v),\quad u,\ v\in H^{1,p}(\Omega)$$

定义了从 $H^{1,p}(\Omega)$ 到它的对偶空间的一个映射 A，具体形式

为

$$Au=a_0(x;\ u,\ u_x)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x;\ u,\ u_x).$$ [1)]

显然，只要函数 $a_i(x;\ \xi)$ 满足下述弱椭圆条件

(10) $$\sum_{i=0}^{n}[a_i(x;\ \xi)-a_i(x;\ \xi')](\xi_i-\xi_i')\geqslant 0,\quad \xi,\ \xi'\in\mathbb{R}^{n+1},$$

则映射 A 是单调的，即

$$(Au-Av,\ u-v)=a(u,\ u-v)-a(v,\ u-v)\geqslant 0.$$

如果存在一个函数 $\Phi(x;\ \xi)$ 使得

$$a_i(x;\ \xi)=\frac{\partial}{\partial\xi_i}\Phi(x;\ \xi),\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ n,$$

则 A 是下述多重积分：

(11) $$F(u)=\int_\Omega\Phi(x;\ u,\ u_x)dx$$ 的微分，

由此有 $$a(u,\ v)=\frac{d}{dt}F(u+tv)\big|_{t=0}=(DF(u),\ v).$$

那末，单调性条件(10)等价于 $\Phi(x;\ \xi)$ 是 ξ 的凸函数(也可看下面的附注)。

这样，当我们在一个约束的凸集上，求像(11)这样的积分泛函极小时，就会出现含有像上面的算子 A 那样的微分算子的变分不等式。

关于上述类型的偏微分算子，还有更高阶的，及相关的边值问题，已有广泛的文献。这里只参考 F. E. Browder[1], [2], J. Leray 和 J. L. Lions[1] 及 P. H. Hartman 和 G. Stampacchia[1]，那里详细研究了具有单边约束的变分问题。理论及其应用的概述可在 F. E. Browder[6] [7], J. L. Lions [1], R. I. Kachurovski[3] 中找到。

1) 译者注：这个式子，只当将 A 限制在 $H_0^{1,p}(\Omega)$ 中时才成立。

附注 3 将单调算子理论应用到椭圆型偏微分算子边值问题已经带来了理论的自然推广. 事实上, 在同像上述 A 那样的算子相关的许多应用中, 更方便的是, 只要求函数 $a_i(x; u, u_{x_1}, \cdots, u_{x_n})$ 对应于最高阶导数—在我们的例子中是 $u_{x_1}, \cdots, u_{x_n}$——作为自变量是单调的, 而利用列紧性的论证来处理低阶项—在我们的例子中是 u. 当 $A=DF$, F 是积分泛函(11)时, 这对应于将凸性假设限制在 F 中所出现的最高阶导数项, 正像在许多变分法问题中那样, 这是自然的.

用这种方式产生的算子可以这样来描述, 在最简单的情形中, 将一个列紧算子加到单调算子上, 在一般情形中, 容许在单调算子和列紧算子之间进行更加复杂的编排. 这些所谓**半单调**(semimonotone)算子也在上面所引的文献中有讨论.

在这方面, 还要提到更一般的一类算子-**伪单调**算子, 这已为 H. Brezis[1], [2], [3]所引进, 也可见 J. L. Lions[1].

例 10 带障碍的最小曲面

考虑泛函

$$F(v)=\int_{\Omega}\sqrt{1+|\operatorname{grad} v|^2}\,dx,$$

它给出曲面 $v=v(x)$, $x\in\Omega$ 的面积. 我们可以在所有 $v\geqslant\psi$ (在 Ω 的一个列紧子集 E 上)的函数空间的锥上, 求 $F(v)$ 的极小, 其中 ψ 是给定在 Ω 的列紧子集 E 上的一个函数.

刻划最小曲面 $u=u(x)$ 的变分不等式包含 Euler 算子

$$DF(u)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u_{x_i}}{\sqrt{1+|\operatorname{grad} u|^2}}\right)$$

这里自然的 Sobolev 空间是 $H^{1,1}(\Omega)$, 即所有 $v\in L^1(\Omega)$, 且所有一阶导数 $v_{x_i}\in L^1(\Omega)$. 但是, 这个空间不是自反的. 因此, 上述问题不能用本文的标准方法处理, 从而需要发展特殊的技巧.

从关于最小曲面的广泛的文献中，我们只引用 J. C. C. Nitsche[1], M. Miranda[1], H. Lewy 和 G. Stampacchia [3], E. Giusti[1], R. Temam[1], 这是专门关于障碍问题的.

§2 有限维和迭代存在定理

考虑到变分不等式和不动点问题之间的关系(见第一章命题 2), 并且利用经典的 Brouwer 不动点定理, 我们可容易证明下面的**有限维存在定理**, 它引自 P. H. Hartman 和 G. Stampacchia[1].

定理 1 设 K 是欧氏空间 E^n 的一个非空闭凸子集, $\mathscr{A}$ 是 K 到 E^n 中的一个连续映射. 进一步假定, 或者 K 是有界的, 或者下面强制性条件(coerciveness condition)成立:

(c) **存在一个有界开凸子集 $B\subset E^n$, 及一个向量 $v_0\in K\cap B$, 使得**

$$(\mathscr{A}v|v-v_0)>0 \quad \forall v\in K\cap\partial B,$$

∂B 是 B 的边界. 则下述问题至少存在一个解

II $$u\in K:\ (\mathscr{A}u|v-u)\geqslant 0 \quad \forall v\in K.$$

证明 首先设 K 是有界的, 因此是列紧的.

由第一章的命题 2, u 是上面问题 II 的解, 当且仅当 u 是 K 到其自身的映射

$$P_K(I-\mathscr{A})$$

的不动点, 其中 P_K 是在 K 上的 Riesz 投影. 由于 P_K: $E^n\mapsto K$ 是连续的, 这可由第一章引理 2 的推论 2 得到, 从而映射 $P_K(I-\mathscr{A})$ 也是连续的, 只要 $\mathscr{A}$ 是连续的. 从而, 这个映射存在不动点是 Brouwer 定理的结果.

现在让我们用强制性条件 (c) 代替列紧性假设. 由刚才的证明,可见下述问题存在解 $\bar{u}$

$$\bar{u}\in K\cap\bar{B}: \ (\mathscr{A}\bar{u}|v-\bar{u})\geqslant 0 \quad \forall v\in K\cap\bar{B},$$

其中 $\bar{B}=B\cup\partial B$. 由于我们假设条件 (c) 成立,故 $\bar{u}\notin\partial B$, 因为否则就会有 $(\mathscr{A}\bar{u}|v_0-\bar{u})<0$, 而这与上面的不等式矛盾, 这意味着 $\bar{u}$ 是问题 II 的一个局部解, 因此也是 II 的全局解(参照第一章 §1). ▌

附注 4 对于映射 $\mathscr{A}$ 是一个泛函的梯度时, 强制性条件 (c) 就同 F 在 ∞ 处的增长有关,这点见于下面 §4 的引理 2.

附注 5 利用 Schauder 或 Tychonoff 不动点定理, 定理 1 可扩充到无限维空间, 见 F. E. Browder[8] [11] [14]. 但此时, $\mathscr{A}$ 所要求的连续性假设对于直接应用到上节中所述类型的问题是太强了. ▌

定理 1 不是"构造性"的存在定理, 因为它是依赖于虽则不是构造性却是深刻的 Brower 定理.

但是, 只要当我们能够用一个构造性的不动点定理来代替 Brouwer 定理时, 我们就能容易地把定理 1 转变成"构造性"的定理. 主要的例子显然可由著名的压缩原理给出.

事实上,我们有下述迭代存在定理:

定理 2 设 K 是 Hilbert 空间 V 的一个闭凸子集, $\mathscr{A}$ 是 K 到 V 中的一个映射,使得

(*) $\qquad I-\rho\mathscr{A}$, 对某个 $\rho>0$, 是压缩的.

则下述问题存在唯一解 u,

II $\qquad u\in K: \ (\mathscr{A}u|v-u)\geqslant 0 \quad \forall v\in K,$

而且在 V 中 $u=\lim u_n$, 其中 (u_n) 是下述迭代格式给出的序列,

$(\mathrm{IV_n})$ $\qquad u_{n+1}=P_k(u_n-\rho\mathscr{A}u_n), \quad u_0\in K.$

证明 由于 P_k: $V\mapsto K$ 是非扩张的(见第一章的引理 2 的推论 2)，因此要使得映射 $P_k(I-\rho\mathscr{A})$ 是压缩的只要 $I-\rho\mathscr{A}$ 是压缩的，这就是条件(*). 因此，由迭代格式 (IV_n) 产生唯一的不动点 u，再由第一章的命题 2 知，这也是问题 II 的解. ∎

下面的引理使定理 2 完整了，这个引理给出，使得 $I-\rho\mathscr{A}$ 为压缩的一个简单的充分条件.

引理 1 设 $\mathscr{A}$ 是从 Hilbert 空间 V 的一个子集 K 到 V 中的一个映射，使得

(i) $\mathscr{A}$ 是 Lipschiz 的，即存在 $L>0$ 使得

$$\|\mathscr{A}u-\mathscr{A}v\|\leqslant L\|u-v\|,\quad u,\ v\in K,$$

(ii) $\mathscr{A}$ 是强单调的，即存在 $c>0$ 使得

$$c\|u-v\|^2\leqslant(\mathscr{A}u-\mathscr{A}v\,|\,u-v),\quad u,\ v\in K.$$

则映射 $I-\rho\mathscr{A}$ 是在 V 中压缩的，只要 ρ 满足

$$0<\rho<\frac{2c}{L^2}.$$

证明 初等计算可证

$$\|(I-\rho\mathscr{A})u-(I-\rho\mathscr{A})v\|^2$$
$$=\|u-v\|^2-2\rho(\mathscr{A}u-\mathscr{A}v\,|\,u-v)+\rho^2\|\mathscr{A}u-\mathscr{A}v\|^2.$$

因此，由(i)及(ii)

$$\|(I-\rho\mathscr{A})u-(I-\rho\mathscr{A})v\|^2\leqslant(1-2\rho c+L^2\rho^2)\|u-v\|^2,$$

因此 $I-\rho\mathscr{A}$ 是压缩的，即 $1-2\rho c+L^2\rho^2<1$(注意 $c\leqslant L$)，只要 $-2\rho c+L^2\rho^2<0$，而这正是 $0<\rho<2c/L^2$. ∎

附注 6 ρ 的函数 $1-2c\rho+L^2\rho^2$ 在

$$\rho_{opt}=c/L^2$$

处达到最小值，此时的压缩常数是

$$(1-2c\rho_{opt}+L^2\rho_{opt}^2)^{1/2}=\left(1-\frac{c^2}{L^2}\right)^{1/2}.$$ ∎

解变分不等式的迭代法已为 J. L. Lions 和 G. Stampacchia[1], H. Brezis 和 M. Sibony[1], M. Sibony[1], [2], J. P. Dias-M. Sibony[1], G. Stampacchia[5] 所考虑. 也可见于上面所引述的 J. L. Lions, R. Glowinski 和 R. Tremoliers 的著作.

含有 Hilbert 空间中的双线性型的变分不等式的特殊情形，将在下节中更详细地处理.

关于用迭代法解含有单调算子的方程的进一步的参考文献, 可看 F. E. Browder 和 W. V. Petryshyn[1], R. I. Kachurovskii[3].

§3 Hilbert 空间中双线性型的变分不等式

应用上节中存在性及逼近方法的重要的一类问题，是在 Hilbert 空间 V 中含有强制 (coercive) 连续双线性型的变分不等式.

先回忆一下, V 上的一个双线性型 $a(u, v)$ 是连续的(在 $V\times V$ 上), 当且仅当存在常数 $L>0$, 使得

$$|a(u, v)|\leqslant L\|u\|\|v\|, \quad u, v\in V. \tag{12}$$

此外, $a(u, v)$ 称为在 V 上是强制的 (coercive), 如果存在一个常数 $c>0$, 使得

$$c\|v\|^2\leqslant a(v, v) \quad v\in V. \tag{13}$$

〔像在第一章 §8 中那样, 将用 $(\cdot|\cdot)$ 表示 V 中的内积, 且记 $\|\cdot\|=(\cdot|\cdot)^{1/2}$〕.

还要回忆一下, V 上的任何连续双线性型 $a(u, v)$, 可以利用有界线性算子

$$\mathscr{A}: V\mapsto V$$

在给定的 V 的内积中，表示成

$$a(u,\ v)=(\mathscr{A}u|v),\quad u,\ v\in V.$$

这样的算子 $\mathscr{A}$ 显然在 V 中是 Lipschiz 的，同时 $a(u,\ v)$ 的强制性条件不是别的，正是引理 1 中所说的 $\mathscr{A}$ 的强单调性. 还要指出那个引理中 $\mathscr{A}$ 满足的条件 (i) 和 (ii) 中的常数 L 和 c，分别同(12)及(13)中的常数是一样的.

那末下面的定理是上面定理 2 的一个直接的结果.

定理 3 设 $a(u,\ v)$ 是在 Hilbert 空间 V 上的一个强制连续双线性型，K 是 V 的一个闭凸子集. 则对 V 的对偶空间 V^* 中的任意给定的 f，下述问题存在唯一解 u

(14) $$u\in K:\ a(u,\ v-u)\geqslant(f,\ v-u)\quad \forall v\in K.$$

证明 利用 V 的内积，上面问题可写成

(15) $$u\in K:\ (\mathscr{A}u-\tilde{f}\,|\,v-u)\geqslant 0\quad \forall v\in K$$

其中 $\mathscr{A}$ 是算子，它是 $a(u,\ v)$ 在 V 中的表示，而 $\tilde{f}$ 是 V 的一个向量，使得

$$(f,\ w)=(\tilde{f}\,|\,w)\quad \forall w\in V,$$

即 $\tilde{f}=J^{-1}f$，J 是 V 到 V^* 上的 Riesz 同构.

像我们已指出的那样，算子 $\mathscr{A}$，因此还有算子 $\mathscr{A}-\tilde{f}$，是在 V 中 Lipschiz 且强单调的. 因此，由引理 1，对充分小的 $\rho>0$，映射 $I-\rho(\mathscr{A}-\tilde{f})$ 是压缩的，从而再由定理 2 知，问题(15)存在唯一解 u. ∎

附注 7 定理 2 的一个进一步的结果是下面的**迭代算法**，它产生问题(14)的解 u：

(16) $$u_{n+1}=P_K[u_n-\rho(\mathscr{A}u_n-\tilde{f})],\quad u_0\in K,$$

其中 $$0<\rho<\frac{2c}{L^2}\quad (\rho_{opt}=\sqrt{1-c^2/L^2})$$

常数 c 和 L 是出现在 $a(u,\ v)$ 所满足的不等式 (12) 及

(13)中的数.

我们还可以将这个格式写成两步,

(17) $$\begin{cases} u_{n+1/2}=\mathscr{A}u_n-\tilde{f} \\ u_{n+1}=P_K(u_n-\rho u_{n+1/2}) \end{cases}$$

利用 P_K 的弱表示(见第一章的引理 2),迭代格式(17)可写成下面弱形式:

$$\begin{cases} u_{n+1/2}=\mathscr{A}u_n-\tilde{f} \\ u_{n+1}\in K: \ (u_{n+1}-[u_n-\rho u_{n+1/2}]\,|\,v-u_{n+1})\geqslant 0 \quad \forall v\in K. \end{cases}$$

利用原来的 $a(u, v)$,上式即为

(18) $$\begin{cases} u_{n+1}\in K: \ (u_{n+1}|v-u_{n+1}) \\ \quad \geqslant (u_n|v-u_{n+1})-\rho[a(u_n, v-u_{n+1}) \\ \qquad -(f, v-u_{n+1})], \quad \forall v\in K. \end{cases}$$

让我们注意,这正好是这样一个变分不等式,在出发的不等式中,以 V 的内积代替二次型 $a(u, v)$,将 V^* 中的给定泛函 f 代之以泛函 g_n,

$$g_n(w)=(u_n|w)-\rho[a(u_n, w)-(f, w)]. \ \blacksquare$$

附注 8 给出问题(14)的解的迭代算法,强形式(16)或弱形式(18),均依赖于所采用的指定的内积. 事实上,像我们在第一章,附注 5 中所已经指出的那样,将 V 的内积变成另一种等价的内积,这不影响双线性型 $a(u, v)$ 及 V^* 中给定的向量 f,因此我们的问题也是不变的.

另一方面,这样的改变,修改了投影 P_K 及(12)和(13)中的最好常数 c 及 L,因此也修改了在算法中所容许的 ρ 的收敛区域 $0<\rho<2c/L^2$.

而且,在算法的强形式(16)中,还必须考虑到 $\mathscr{A}$ 及 $\tilde{f}$ 的改变.

为使得内积的作用明显地表现出来,引入 V 上的一个连

续双线性型 $b(u, v)$，且设 $b(u, v)$ 是对称的，即

$$b(u, v)=b(v, u), \quad u, v\in V,$$

且在 V 上是强制的．在这些假设下，

$$(u|v)_b=b(u, v) \tag{19}$$

就定义了 V 中的一个内积，它等价于原来的内积．显然，用这样一种方式产生的任何内积都等价．

如果我们用 P_K^b 及 J_b 表示关于新内积 (19)，K 上的 Riesz 投影及 V 到 V^* 上的 Riesz 同构，那末我们的迭代算法的强形式(16)为

$$u_{n+1}=P_K^b[u_n-\rho J_b^{-1}(Au_n-f)] \tag{20}$$

其中 $A: V\mapsto V^*$ 是有界线性算子，定义为

$$(Au, v)=a(u, v)=(\mathscr{A}u|v), \quad u, v\in V.$$

(20)的弱形式现在是

$$\left\{\begin{aligned} &u_{n+1}\in K: \ b(u_{n+1}, v-u_{n+1}) \\ &\quad \geqslant b(u_n, v-u_{n+1})-\rho[a(u_n, v-u_{n+1}) \\ &\qquad -(f, v-u_{n+1})], \quad \forall v\in K. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

上面方括号中的项不受内积变化的影响，事实上，在(21)中同在(18)中一样．

但是，在两步格式(17)中，V 的向量 $u_{n+1/2}$ 的表示式依赖于内积，现在写成

$$u_{n+1/2}=J_b^{-1}(Au_n-f)$$

这样，$u_{n+1/2}$ 的显式求值需要由双线性型 $b(u, v)$ 导出的 Riesz 同构 J_b 的逆．由仔细选取 $b(u, v)$，我们可以期望这个逆是简单的，从而简化整个算法．解的某些正则性质可能使得这个选取容易一些．关于这一点，详细可参考 J. L Lions, R. Glowinski 和 R. Tremoliers[1]，在那里可找到本节中所讨论的迭代法的更详细的说明．▌

对于含有 Lipschiz 强单调算子的变分不等式的类似的结果也可从定理 2 导出，我们建议参考前节中提到的 H. Brezis 和 M. Sibony 的文章.

§4 直接存在定理

正如本章引言中所述，当变分不等式中所含的映射 A 是某个凸泛函 F 的微分时，那末变分不等式解的存在性可以这样来证明：将变分学的直接存在定理应用到等价的关于泛函 F 的极小问题.

从一般观点来看，这个方法也是富有成效的，因为在第三章中，即使去掉 A 是某个凸泛函的微分这一假设，那里新得到的定理也将被证明成立.

现在回忆一下，下面极小化问题的基本存在定理.

定理 4 设 K 是自反的 Banach 空间 X 的一个非空闭凸子集，F 是 K 上的一个下半连续凸泛函. 再设或者 K 是有界的，或者下面的强制性条件 (c_0) 成立：

(c_0)：存在一个向量 $v_0\in K$ 及一个常数 $R>0$，且 $F(v_0)<+\infty$，$\|v_0\|<R$，使得

$$F(v)>F(v_0)\quad \forall v\in K,\ \|v\|=R,$$

则下述问题至少存在一个解 u，

$$\text{(I)}\qquad u\in K:\ F(u)\leqslant F(v)\quad \forall v\in K.$$

证明 定理的证明根据下面两个泛函分析中的著名结果：赋范空间的一个闭凸子集，在空间的弱拓扑下也是闭的；自反的 Banach 空间的有界子集在那个拓扑下是相对紧的. 因此 X 的有界闭凸子集是弱列紧的.

那末，如果 K 是有界的，则 K 上 F 的所有水平集

$$L(v)=\{z\in K:\ F(z)\leqslant F(v)\}$$

也是弱列紧的. 这样就有

$$\bigcap_{v\in k} L(v)\neq\phi, \tag{22}$$

这就是说, 上述问题 I 有解 u. 如果 K 的有界性假设代之以强制性条件 (c_0), 只要我们能证明, 在 K 上 F 的某些非空水平集有界, 那末我们仍可导出如前的结果.

现在, 如果 v_0 及 R 分别是出现在 (c_0) 中的向量及常数, 容易证明所有属于 $L(v_0)$ 的向量 z, 按范数以 R 为界.

〔事实上, 如果存在 $z_1\in L(v_0)$ 且 $\|z_1\|>R$, 则也必存在 $z_2\in L(v_0)$ 使得 $\|z_2\|=R$, 而这与条件 $F(z_2)>F(v_0)$ 矛盾.〕▌

定理 4 的附录 1 在定理 4 的假设下, 上面问题 I 的全部解 u 的集合, 是 K 的一个有界闭凸子集.

事实上, 解集正是集合(22), 而由于某些(或所有)集合 $L(v)$ 是有界闭凸的, 所以集合(22)也如此. ▌

定理 4 的附录 2 如果 F 在 K 上是严格凸的, 即

$$2F\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)<F(u_1)+F(u_2),\quad u_1\neq u_2,\ u_1,\ u_2\in K,$$

则问题 I 的解 u 是唯一的.

事实上, 如果 u_1 及 u_2 是问题 I 的两个不同的解, 因为 $(u_1+u_2)/2\in K$, 我们就有

$$F(u_1)\leqslant F((u_1+u_2)/2)$$
$$F(u_2)\leqslant F((u_1+u_2)/2),$$

因此 $$F(u_1)+F(u_2)\leqslant 2F((u_1+u_2)/2),$$

而这与 F 的严格凸性相矛盾. ▌

现设泛函 F 在 X 上是可微的, 问包含在定理 4 假设中的 F 的性质, 如何用 F 的微分 DF 来表示:

由第一章 §6, 我们已经知道, F 的凸性等价于映射 DF

的单调性. 而且 F 的可微性显然保证它的下半连续性, 这从下面不等式极易得出:

$$F(v)\geqslant F(u)+(DF(u),\ v-u),\quad u,\ v\in X,$$

这推出 $\liminf F(v_j)\geqslant F(u)$, 只要 v_j(弱或强)收敛于给定的 u.

更有兴趣的是研究 F 的强制性和 DF 的强制性(coercivity)之间的关系,而下面的四条引理正是关于这件事的.

现设 F 是赋范空间 X 上的一个可微凸泛函, DF: $X\mapsto X^*$ 是 F 的微分,而 K 是 X 的一个无界凸子集.

引理 2 设 DF 满足条件: (d_0) 存在 $v_0\in K$ 及 $R>0$, $\|v_0\|<R$, 使得

$$(DF(v),\ v-v_0)>0\quad \forall v\in K,\ \|v\|=R,$$

则 F 满足条件:

(c_0) 存在 $v_0\in K$ 及 $R>0$, $F(v_0)<+\infty$ 及 $\|v_0\|<R$, 使得

$$F(v)>F(v_0)\quad \forall v\in K,\ \|v\|=R.$$

证明 设 v_0 及 R 使得 (d_0) 成立, 且设固定 $R'>R$, 令 z 是 K 的一个向量, 具有 $\|z\|=R'$. 因为 $v_0\in K$ 且 $\|v_0\|<R<\|z\|$,则对于适当的 $\bar{\varepsilon}>0$, 向量

$$v=\frac{\bar{\varepsilon}}{1+\bar{\varepsilon}}v_0+\frac{1}{1+\bar{\varepsilon}}z$$

属于 K 且 $\|v\|=R$. 此外,因为

$$z-v=\bar{\varepsilon}(v-v_0),$$

就有

$$\begin{aligned}F(z)&\geqslant F(v)+(DF(v),\ z-v)\\&=F(v)+\bar{\varepsilon}(DF(v),\ v-v_0),\end{aligned}$$

从而由 (d_0) 有

$$F(z)>F(v).$$

因此，若取 $v_0=z_0$ 是使 F 在 $K\cap\{z:\|z\|\leqslant R\}$ 为极小的任何向量，则条件 (c_0) 满足. ∎

如果 X 的维数是有限的，并且仅在这样条件下只要 DF 满足强制性条件 (d_0)，就可推出泛函 F 满足的下面更强的条件.

引理 3 如果 X 是有限维赋范空间，则引理 2 的条件 (d_0) 就可推出下面的 (c_1) 成立:

(c_1) $\qquad F(v)\to+\infty$, 当 $\|v\|\to+\infty$ 时, $v\in K$.

证明 映射 $v\mapsto(DF(v),\ v-v_0)$ 在 X 上连续，因此它在 X 的列紧子集

$$K\cap\{v:\|v\|=R\}$$

上，达到其最小值 m，且 $m>0$，这是由于我们假定 (d_0) 成立. 这样，

$$(DF(v),\ v-v_0)\geqslant m>0\quad\forall v\in K,\ \|v\|=R. \tag{23}$$

现在，对每一个 $z\in K$, $\|z\|>R$, 如引理 2 的证明中那样，我们可找到一个向量

$$v\in K,\ \|v\|=R,$$

使得
$$z-v=\frac{\|z-v\|}{\|v-v_0\|}(v-v_0)$$

且
$$F(z)\geqslant F(v)+\frac{\|z-v\|}{\|v-v_0\|}\cdot(DF(v),\ v-v_0).$$

因此，如果 z_0 是使 F 在 $K\cap\{v:\|v\|=R\}$ 上取极小值的任一个向量，则考虑到(23)，就有

$$F(z)\geqslant F(z_0)+\frac{\|z\|-R}{R+\|v_0\|}\cdot m,$$

因此 $\|z\|\to\infty$ 就推出 $F(z)\to+\infty$. ∎

附注 9 如果 X 是无限维的，那末上面的引理不成立，

这由下面的简单例子即可说明：$X=l_2$，这是所有这样的序列 $v\equiv(v_k)_k$ 组成的空间，使得

$$\|v\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}v_k^2\right)^{1/2}<+\infty,$$

$$F(v)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k^2}{K^2},\quad v\equiv(v_k)_k\in l_2,$$

因此
$$DF(v)\simeq\left(\frac{v_k}{K^2}\right)_k.$$

则有

如果 $v\neq0$，
$$(DF(v),\ v)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k^2}{K^2}>0,$$

而且 $F(v)>0\ \forall v\neq0$，从而满足引理 2 的条件（译者注：取 $v_0=0$ 即可），但是，若取

$$v^{(n)}\equiv(\underbrace{0,\ \cdots,\ 0,\ \sqrt{n}}_{n},\ 0\cdots)$$

则
$$\|v^{(n)}\|=\sqrt{n}\to\infty,$$

而
$$F(v^{(n)})=\frac{1}{2n}\to0.\ \rrbracket$$

这样，为使在任何赋范空间 X 中，F 满足强制性条件 (c_1)，DF 必须在比 (d_0) 更强的意义下是强制性的．确实我们有下述

引理 4 设 DF 满足条件

(d_1)：存在 $v_0\in K$，使得

$(DF(v),\ v-v_0)\to+\infty$ 当 $\|v\|\to\infty$ 时，$v\in K$.

则 F 满足上面引理中的强制性条件 (c_1).

证明 令 v_0 是条件 (d_1) 中的向量，且 $R>0$ 使得 $\|v_0\|<R$ 同时对某个 $m>0$，(23)成立．按照假设 (d_1)，这样的 R 是存在的．其后的证明同引理 3 的证明一样．]

若用一个仿射函数 $(v_0^*, v)+c$ 修正 $F(v)$，其中 $v_0^*\in X^*$，$c\in R$，那末强制性条件 (c_1) 是不稳定的，因为如果在 $DF(v)$ 上加上一个常数项 v_0^*，条件 (d_1) 是不稳定的，换言之，映射 $v\mapsto DF(v)-v_0^*$ 的条件 (d_1) 依赖于给定的向量 v_0^*.

在上述修正下强制性条件是稳定的被下面的引理所给出

引理 5 令 DF 满足条件

(d_2) $$\frac{(DF(v),\ v)}{\|v\|}\to+\infty \quad 当\ \|v\|\to\infty\ 时,\ v\in K,$$

则 F 满足条件

(c_2) $$\frac{F(v)}{\|v\|}\to+\infty \quad 当\ \|v\|\to\infty\ 时,\ v\in K.$$

证明 容易证明，本引理在加 F 以一个仿射函数下是不变的. 因此，只要对下述泛函

$$\tilde{F}(v)=F(v)-(DF(0),\ v)-F(0)$$

证明引理即可.

$\tilde{F}$ 仍是 X 上可微的凸泛函，$\widetilde{DF}=DF-DF(0)$，且有

$$\tilde{F}(0)=0,\quad D\tilde{F}(0)=0.$$

因此，有

$$\tilde{F}(v)=\int_0^1\frac{d}{dt}\tilde{F}(tv)dt=\int_0^1(D\tilde{F}(tv),\ v)dt,$$

其中，由 DF 的单调性，可见

$$(D\tilde{F}(tv),\ v)=(D\tilde{F}(tv)-D\tilde{F}(0),\ v)\geqslant0,\quad t>0.$$

这样，对某个适当 $\bar{t}$，$\frac{1}{2}<\bar{t}<1$，有

$$\tilde{F}(v)\geqslant\int_{1/2}^1(D\tilde{F}(tv),\ v)dt=\frac{1}{2}(D\tilde{F}(\bar{t}v),\ v),$$

因此也有 $$\frac{\tilde{F}(v)}{\|v\|}\geqslant\frac{1}{2}\,\frac{(D\tilde{F}(\bar{t}v),\ \bar{t}v)}{\|\bar{t}v\|},\quad v\neq0.$$

当 $\|v\|\to\infty$ 时，也有 $\|\bar{t}v\|\to\infty$. 因此，(d_2) 就推出 (c_2). ∎

现在，我们知道了，怎样用 F 的微分 DF 来表述在本节开始所给的直接存在定理中所要求的 F 的性质.

另一方面，我们也知道在那个定理中所考虑的极小化问题的解 u，可由变分不等式来刻划

$$u \in K: \ (DF(u),\ v-u) \geqslant 0 \quad \forall v \in K.$$

因此，只要映射 A 是一个在 X 上泛函 F 的微分时，那末下面的存在定理不比上面的定理 4 多任何东西.

定理 5 令 A 是从自反的 Banach 空间 X 到它的对偶 X^* 的一个单调半连续(hemicontinuous)的映射，K 是 X 的一个非空闭凸子集. 设或者 K 有界，或者在 K 上，A 满足下面强制性条件：

(d_0) 存在 $v_0 \in K$ 及 $R>0$, $\|v_0\|<R$, 使得

$$(Av,\ v-v_0) > 0 \quad \forall v \in K,\ \|v\| = R.$$

则下面的变分不等式，至少存在一个解 u：

$$\text{II} \qquad u \in K: \ (Au,\ v-u) \geqslant 0 \quad \forall v \in K.$$

在附加假设 $A=DF$ 下，定理 5 的证明

如果 A 是在 X 上泛函数 F 的 Gateaux 导数，则从上面的讨论可见，这样的 F 是凸的，下半连续的，而且在 K 是无界的情形下，它满足定理 4 的强制性条件(c_0). 因此，存在向量 $u \in K$，使 F 在 K 上取最小值. 由第一章命题 1 知，这个极小化解 u 是上面问题 II 的解. ❚

附注 10 当 $f \in X^*$，如果我们要不等式

$$u \in K: \ (Au,\ v-u) \geqslant (f,\ v-u) \quad \forall v \in K.$$

的解 u 存在，那末我们必须代替上面的条件 (d_0) 以更强的条件(d_2)成立. 象已经指出的那样，后面的条件在 A 加上一个常向量下是稳定的. ❚

一般情形中的定理 5，为 P. H. Hartman 和 G. Stampacchia[1] 和 F. E. Browder[5] 所处理. 在 A 是有界的附加假设下，定理 5 的证明将在第三章中给出，而这个证明基于第一章的线性化引理，及在凸集 K 的扰动下，II 的解的"稳定性定理". 而此定理的证明也在第三章中给出.

但现在，我们容易证明上面问题 II 的所有解 u 的集合，同定理 4 中所考虑的极小化问题的所有解的集合有同样的性质.

事实上，我们有

定理 5 的附录 1 在定理的假定下，不等式 II 的所有解的集合是 K 的一个有界闭凸子集.

证明 由第一章 §7 线性化引理的推论(那里用到 A 的半连续性)知，解集是闭且凸的. 而且，如果 K 无界，则 II 的任何解 u，按模以出现在条件(d_0)中的常数 R 为界，这是容易证明的，只要考虑到所有解的集合的凸性. ▌

定理 5 的附录 2 如果 A 在 K 上严格单调，即

$$(Au-Av,\ u-v)>0, \quad u\neq v,\ u,\ v\in K,$$

则 II 的解 u 是唯一的.

证明 如果 u_1 和 u_2 是 II 的解，则有下面二式

$$(Au_1,\ u_2-u_1)\geqslant 0,$$

$$(Au_2,\ u_1-u_2)\geqslant 0,$$

因此

$$(Au_1-Au_2,\ u_1-u_2)\leqslant 0,$$

由 A 的单调性推出

$$(Au_1-Au_2,\ u_1-u_2)=0.$$

因此，如果 $u_1\neq u_2$，这与 A 的严格单调性相矛盾. ▌

附注 11 如果 $A=DF$，则 A 是严格单调的，当且仅当 F 是严格凸的(参照第一章 §6 引理 1). 事实上，如果 A 是严格

单调的，而凸泛函 F 却不是严格凸的，则在连接某两点 u_1, u_2 的一段直线上，F 的方向导数就会是常数，但这与 A 的严格单调性相矛盾．〔这个证明也可这样来得到，只要注意在上面所说到的引理的推导 (iii)⇒(ii)⇒(i) 中，在 $u\neq v$ 时，处处有严格不等式.〕

另一方面，如果 F 是严格凸的，则对每一个 t: $0<t<1$,

$$F(u+t(v-u))<F(u)+t[F(v)-F(u)] \quad u\neq v,$$

因此，象在第一章 § 6(2) 式的证明一样，有

$$F(v)-F(u)>\frac{1}{t}[F(u+t(v-u))-F(u)]$$
$$\geqslant (DF(u),\ v-u)$$

对每个 $v\neq u$ 均成立.

交换 u 和 v 的地位，再将所得两个不等式相加，有

$$0>(DF(u)-DF(v),\ v-u), \quad u\neq v. \quad \blacksquare$$

第　三　章

凸集和变分不等式的解的收敛性

变分不等式的解，在不等式所含凸集的扰动下，具有显著的"稳定"性质．在下面 §3 中，我们将通过在赋范空间的所有闭凸子集的空间中引进适当的拓扑，描述这种稳定性．上述的适于描述扰动的拓扑将在下面 §2 中讨论．

这种稳定性也是 §4 中将证明的无限维存在定理内蕴的性质．事实上，该定理可以从 Euclid 空间中变分不等式的存在定理，通过用一族有限维问题逼近原始问题而得到．

在对映射 A 的适当假定下，这种步骤容易转变成"构造性的"，得出变分不等式数值解的 Ritz–Galerkin 型方法．原始问题的解 $u(x)$ 可作为一族逼近解 u_h 在适当范数下的极限而求得，逼近解族数值上可由在不断增加维数的欧氏空间中解变分不等式而算出．

这种逼近法首先在下面的 §1 中略述，然后在 §5 和 §6 中更详细的讨论．

最后在 §7 中，给出变分不等式对偶性理论的简短说明．把这个课题同互补系相联系时，我们将只限于讨论锥上的变分不等式．

§1　Ritz–Galerkin 逼近

考虑在赋范空间 X 中的变分不等式

(1) $$u \in K: \ (Au, v-u) \geqslant 0 \quad \forall v \in K.$$
我们将把 X 的元素说成函数.

现设 X_h 是 X 的与指定参数 h 有关的某有限维子空间,又设

(2) $$\varphi_1^h(x), \cdots, \varphi_n^h(x), \quad n=n_h$$
是 X_h 中的基, $n=n_h$ 是 X_h 的维数,因此, X_h 中的函数 $v_h(x)$ 可表为

(3) $$v_h(x)=\sum_q v_q^h \varphi_q^h(x),$$
其中 $(v_q^h)_q$ 是 $v_h(x)$ 在取定的基(2)下的分量, q 从 1 到 $n=n_h$.

选取 X_h 的一凸子集 K_h,宜于用作所给的 K 的近似, K 的这种有限维近似的选取是关键的,我们将马上回到这一点.

因此原始问题(1)替换为如下近似问题

(4) $$u_h \in K_h: \ (Au_h, v_h-u_h) \geqslant 0 \quad \forall v_h \in K_h,$$
为简便起见,其中算子 A 保持不变.

这意味着在 K_h 中的近似解 $u_h(x)$, 须对 K_h 的所有 $v_h(x)$,精确地满足给定的不等式.

若在选定的生成子空间 X_h 的基 $(\varphi_q^h(x))_q$ 下, $u_h(x)$ 与 $v_h(x)$ 取(3)的表示法,并将它们代入(4), 则可发现上述逼近问题变成在空间 R^n 中的如下离散问题的形式:

(5) $$u^h=(u_q^h) \in C^h: \ \sum_s A_s^h(u_1^h, \cdots, u_n^h)(v_s^h-u_s^h) \geqslant 0 \qquad \forall v^h=(v_q^h) \in C^h,$$
其中向量场 A_s^h 为

(6) $$A_s^h(u_1^h, \cdots, u_n^h)=(A(\sum_q u_q^h \varphi_q^h), \varphi_s^h), \quad s=1, \cdots, n,$$
右边是 X_h 与其对偶 X_h^* 间的对偶积, C^h 是 R^h 的凸子集
$$C^h=\{v^h=(v_q^h) \in R^n: \ v_h(x)=\sum_q v_q^h \varphi_q^h(x) \in K_h\}.$$

当 A 是线性映射时，不等式组(5)简化为线性不等式组

$$(7)\quad u^h=(u_q^h)\in C^h:\ \sum_{qs}A_{qs}^h u_q^h(v_s^h-u_s^h)\geqslant 0\quad \forall v^h=(v_s^h)\in C^h,$$

而 $n\times n$ 矩阵(A_{qs}^h)由

$$(8)\qquad A_{qs}^h=(A\varphi_q^h,\ \varphi_s^h),\quad q,\ s=1,\ \cdots,\ n$$

给定.

让我们指出，至此我们已经考虑了三个不同的问题，第一，在空间 X 中的原始问题(1)；第二，在 X 的有限维子空间 X_h 中的逼近问题(4)；第三，在 n 维向量空间 R^n 中的离散问题(5)，$n=n_h$ 是 X_h 的维数.

为了描述逼近问题(4)，只须指定 X 的子空间 X_h 以及 X_h 的凸子集 K_h. 为了描述离散问题(5)，必须加上选定子空间 X_h 中的基.

近似凸子集 K_h 的选取，是我们处理不等式的 Galerkin 逼近方案的基本补充环节. 当问题简化为方程 $Au=0$(例如当 $K=X$ 就是这种情形)，则只须进行子空间 X_h 的选取.

一族"好的"近似 K_h 的选取应服从如下两个一般的要求：第一，相应的近似问题能转换为尽可能"易解"的离散问题；第二，K_h 依赖于参数 h，使得当 K_h 趋向 K 时，近似解 $u_h(x)$ 收敛于原始解 $u(x)$.

容易认识到，子空间 X_h 一旦选定后，K_h 的自然的选取并不总是成功的. 例如，若 X 是可分 Hilbert 空间，X_h 是由 X 的已给定的正交组的前 n 个向量生成的子空间，K 是由 X 的向量 v_0 生成的一维子空间，对于已给定的基，v_0 有无穷多个非零分量，则一般作为 K_h 的最自然的选择是 $K_h=K\cap X_h$，显然这是一种不好的选取，因为这个 K_h 由单个向量 0 组成.

§2 关于凸集和凸函数的收敛性

正如前一节所指出，一给定的变分不等式的有限维近似，就其不等式所含的凸集的近似以及相应近似解的收敛性而言，可通过在赋范空间的整个闭凸子集族中适当地定义拓扑来处理. 但是，我们寻求的拓扑必须弱到足以让一族有限维的 K_h 收敛到一个或许是无限维的 K.

为了研究怎样的"好的"收敛

$$K=\lim K_h \tag{9}$$

是所希望的，让我们考虑基本变分问题，它是 Hilbert 空间 V 的给定向量 z 到 V 的一闭线性子空间 M 上的正交投影.

从而可合理地要求一个"好的"收敛满足如下条件

"对于 V 的任意闭线性子空间 M，若 (M_h) 是 V 的任意闭线性子空间序列，使得

$$M=\lim M_h, \tag{10}$$

则对于 V 的每一 z，z 在 M_h 上的正交投影 $P_{M_h}z$ 强收敛于 z 在 M 上的正交投影 P_Mz."

换言之，P_M 是在 M 上的正交投影算子，对于算子的强拓扑，映射

$$M\mapsto P_M$$

在任意 M 处必须连续.

而且，可假定上述要求，关于 V 的子空间的正交补 $M\mapsto M^\perp$ 是不变的.

所以，收敛(10)在 $\perp$ 中也必须稳定，这就是说，必须有

$$M=\lim M_h \quad 当且仅当 \quad M^\perp=\lim M_h^\perp.$$

现设收敛(9)定义成满足上述条件"……"，我们通过按照

(10) 收敛到一给定 M 的任意序列 (M_h)，来导出应满足的某些必要条件.

头一个条件是如下包含关系

$$M \subset s\text{-}\lim\inf M_h,$$

其中 $s\text{-}\lim\inf M_h$ 表示按 V 的强拓扑序列(M_h)的 lim inf,

$$s\text{-}\lim\inf M_h = \{v \in V: v = \text{strong} \lim v_h,\ v_h \in M_h,\ \forall h\}. \tag{11}$$

事实上，由上述性质"……"，对 M 的任意的 z，向量 $z_h = P_{M_h}z$ 属于 M_h，且强收敛于 $P_M z = z$.

下述引理同时表明上述条件在正交补中是不稳定的，为了变成稳定的，又必须怎样加强上述条件.

下面将用 $w\text{-}\lim\sup M_h$ 表示按 V 的弱拓扑序列(M_h)的 lim sup，即

$$w\text{-}\lim\sup M_h = \{v \in V: v = \text{weak} \lim v_{h_j},\ v_{h_j} \in M_{h_j},\ \forall j,\ (M_{h_j})_j \text{是} (M_h)_h \text{的子序列}\}. \tag{12}$$

引理 1 设(M_h)是 V 的闭线性子空间序列，$M_h \neq V$，且 M 是 V 的一闭线性子空间，则我们有

$$M \subset s\text{-}\lim\inf M_h \tag{13}$$

当且仅当

$$w\text{-}\lim\sup M_h^{\perp} \subset M^{\perp}. \tag{14}$$

证明 我们的证明依据如下熟知公式

$$\operatorname{dist}(v,\ H) = \max_{\substack{w \in H^{\perp} \\ \|w\| < 1}} (w|v), \tag{15}$$

它给出 V 的向量 v 到 V 的闭线性子空间 H 的距离.

〔$\operatorname{dist}(v,\ H)$ 可看作 v 在商空间 V/H 中的范数，此商空间的赋范对偶空间等距于 $H^{\perp}$；因此，(15)是任意赋范空间 X 的范数所满足的已知对偶公式

$$\|v\| = \max_{\substack{v^* \in X^* \\ \|v^*\| < 1}} (v^*,\ v)$$

的特殊情形.]

我们证明由(13)可推出(14). 设 $v_0 \in w\text{-}\lim\sup M_h^\perp$, 即

$$v_0 = \text{weak}\lim v_{hj}, \quad v_{hj} \in M_{hj}^\perp, \ \forall j,$$

$(M_{hj}^\perp)_j$ 是 $(M_h^\perp)_h$ 的子序列.

设 $r>0$ 使得

$$\|v_{hj}\| \leqslant r, \quad \text{对于所有 } j,$$

则由(15),对任意的 v 有

$$(r^{-1}v_{hj} | v) \leqslant \text{dist}(v, M_{hj}),$$

再由假设(13), $\text{dist}(v, M_h) \to 0$.

所以,

$$(v_0 | v) = \lim (v_{hj} | v) = 0, \quad \text{对于所有 } v \in M,$$

这就是说, $v_0 \in M^\perp$.

反之,设(14)成立,我们证明对 M 的每一 v 有 $\text{dist}(v, M_h) \to 0$, 便明显地证明了(13)成立.

作为(15)的一个推论, 对每一 h 可找到一向量 $v_h \in M_h^\perp$, 具有

$$\|v_h\| \leqslant 1,$$

使得
$$\text{dist}(v, M_h) = (v_h | v).$$

设 $(M_{hj})_j$ 是 $(M_h)_h$ 的一任意子序列. 根据序列 $(v_h)_h$ 的有界性, 存在 $(v_{hj})_j$ 的一子序列弱收敛于 V 的某向量 v_0, 此子序列我们仍称它为 $(v_{hj})_j$, 而由假设(14), 此 v_0 属于 $M^\perp$. 因此由 $v \in M$, 我们有

$$\text{dist}(v, M_{hj}) = (v_{hj} | v) \to (v_0 | v) = 0.$$

从而,由 $(M_{hj})_j$ 的任意性,有

$$\text{dist}(v, M_h) \to 0. \ ]$$

推论 设 $M = \lim M_h$ 意指上述的包含关系(13)与(14)都成立,则 $M = \lim M_h$ 当且仅当 $M^\perp = \lim M^\perp$.

我们将在§6中看到,若我们象此推论那样来实际地定义子空间序列的收敛性，则我们讨论开始时规定的条件"……"是能满足的：即 $M=\lim M_h$ 确实蕴涵

$$P_M z=\text{strong}\lim_h P_{M_h}z,$$

对 V 的每一 z 成立.

至此的讨论,导致如下一般定义

定义1 赋范空间 X 的一凸子集序列(K_h)收敛于 X 的一(闭凸)子集 K，记作

$$K=\lim_h K_h \quad 在 X 内,$$

如果下列包含关系成立

$$w\text{-}\lim\sup K_h\subset K\subset s\text{-}\lim\inf K_h,$$

其中的极限如上述(11)与(12)那样定义.

附注1 若对每一 h 有 $K_h\subset K$，则 $K=\lim K_h$ 等价于单个包含关系 $K\subset s\text{-}\lim\inf K_h$. 另一方面，若对每一 h 有 $K\subset K_h$,则 $K=\lim K_h$ 简化为条件 $w\text{-}\lim\sup K_h\subset K$.

可以证明,若 X 是一自反 Banach 空间，则在 X 的所有闭凸子集的空间中可以引进 Hausdorff 拓扑，把论及的集合序列归结为上述定义的收敛性. 但我们在这里将不讨论这个问题，而介绍 J. L. Joly[1] 关于凸集和凸函数的拓扑以及它们的配极(Polarity)的作用所作的一般研究.

刚刚定义的收敛(以及上面说到的拓扑)的基本性质在配极中是稳定的,正如在引理1的特殊情形中早已证明的那样.

为了使这点更明确,让我们考虑 Young–Fenchel 变换

$$f\mapsto f^*,$$

其中每一个下半连续凸函数

$$f:\ X\mapsto(-\infty,\ +\infty] \quad (f\neq+\infty)$$

相伴有它的**配极函数**(Polar function)

$$f^*: X^* \mapsto (-\infty, +\infty],$$

其定义是

(16) $$f^*(v^*) = \sup_{v \in X}[(v^*, v) - f(v)], \quad v^* \in X^*.$$

可以证明，f^* 也是一个下半连续的凸函数，而且 $f \mapsto f^*$ 是一一对应 (bijective) 的和对合的 (involutory)，所谓对合即 $f^{**} = f$.

特别地，注意当 $f = \delta_K$ 是 X 一闭凸子集的指示函数(见第一章 § 9)时，则 $f^* = \sigma_K$，其中

(17) $$\sigma_K(v^*) = \sup_{v \in K}(v^*, v)$$

是 K 的支撑函数 (support function)．作为这时的特殊情形，若 $K = M$ 是 X 的一闭子空间，且 $f = \delta_M$，则 $f^* = \delta_{M^\perp}$，其中 $M^\perp$ 是 M 在 X^* 中的零化子(因此，如果 X 是一 Hilbert 空间，且 X^* 恒同于 X，则 $M^\perp$ 是 M 的正交子空间)．更一般地，若 H 是顶点在零点的闭凸锥，则 $(\delta_H)^* = \delta_{H^*}$，其中

(18) $$H^* = \{v^* \in X^*: (v^*, v) \leqslant 0, \ \forall v \in H\}$$

是 H 的**配极锥**(polar cone)．

若 (f_h) 是 X 上的下半连续凸函数的序列，相应于上述定义 1，我们**定义**

(19) $$f = \lim f_h \quad \text{在 } X \text{ 内},$$

其中 f 亦是 X 上的下半连续凸函数，等价于积空间 $X \times R$ 中的极限

$$\operatorname{epi} f = \lim \operatorname{epi} f_h \quad \text{在 } X \times R \text{ 内}$$

让我们回想对于任何下半连续凸函数 $g: X \mapsto (-\infty, +\infty]$，$\operatorname{epi} g$ 是 g 的上图，即积空间 $X \times R$ 的闭凸子集

$$\operatorname{epi} g = \{(v, \beta) \in X \times R: g(v) \leqslant \beta\}.$$

容易证明，若 $f = \delta_K$，$f_h = \delta_{K_h}$，K 与 K_h 是 X 的闭凸子

集，则 $f=\lim f_h$ 当且仅当 $K=\lim K_h$.

而且，若 X 是自反 Banach 空间，在 X 上所有下半连续凸函数的空间中可定义一 Hausdorff 拓扑，它是从上面所述的关于闭凸子集的类似拓扑诱导出的，把论及的序列归结为收敛性(19).

在配极中，这种拓扑的稳定性陈述如下

定理 1 一一对应的 Young-Fenched 映射 $f\mapsto f^*$ 是双方连续的. 特别地，对于自反 Banach 空间 X 中任意的下半连续凸函数序列 (f_h)，我们有，在 X 中 $f=\lim f_h$ 当且仅当在 X^* 中 $f^*=\lim f_h^*$.

此定理推广了引理 1，当 $f_h=\delta_{M_h}$ 时即为引理 1. 上面定理在以后需用的另一特殊情形，是通过取 f 为顶点在 0 的闭凸锥 H 的指示函数而得到的：

推论 设 (H_h) 是在自反 Banach 空间 X 中顶点在 0 的闭凸锥序列，(H_h^*) 是在 X^* 中的配极锥序列，则我们有

$$H=\lim H_h \quad 在\ X\ 内$$

当且仅当

$$H^*=\lim H_h^* \quad 在\ X^*\ 内$$

H^* 是 H 的极锥.

这些结果可沿着引理 1 的证明线索直接地得到证明.

关于定理 1 的证明见 J. L. Joly 的上述引文，以及 U. Mosco[6].

现在让我们给出按照定义 1 收敛的凸集序列的几个例子. X 将总表示一自反 Banach 空间，即使下面陈述的某些结果并不需要空间的自反性.

(a) 设 $M_1\subset M_2\subset\cdots\subset M_h\subset\cdots$ 是 X 的子空间. 则

$$\lim M_h=M,$$

其中 $M=\bigcup_h M_h$ 在 X 中的闭包.

(b) 设 $M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_h \supset \cdots$ 是 X 的子空间，则

$$\lim M_h = M,$$

其中 $M = \bigcap_h M_h$.

Ritz 逼近提供如下例子

(c) 设 K 是 X 的一闭凸子集，其内部 $\mathring{K}$ 在 X 中非空，且 (X_h) 是 X 的子空间的递增序列，使得 $X = \bigcup_h X_h$ 的闭包，则

$$K = \lim K \cap X_h.$$

更一般地，我们有

(c′) 设 K 如同 (c)，(S_h) 是 X 的闭凸子集序列，在 X 中收敛于 S，而且假定 $\mathring{K} \cap S \neq \emptyset$，则

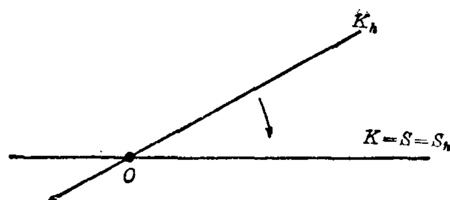
$$K \cap S = \lim K \cap S_h.$$

有关证明参看 U. Mosco[4]，引理 1.4(*)

最后的例子是交运算的连续性的一般问题：在同上面 (c′) 同样假设之下，$K = \lim K_h$，$S = \lim S_h$，能否得出 $K \cap S = \lim K_h \cap S_h$？在 §1 的结尾，我们看到，若抛弃假设 $\mathring{K} \neq \emptyset$，上述(c)的结论可以不成立. 所以，必须使序列包含某些条件. 参看已引用的 J. L. Joly 的论文，上面提出的问题也是在凸函数的形式中来研究的. 因此，是所谓 inf-对合 $f \nabla g$ 的连续性问题，粗略地说，是和 $f+g$ 的配极运算的连续性问题，见 J. J. Moreau[1]. Joly 引进一些角的概念，称为两凸集 K_1 与 K_2 之间的余距离(codistance) $\theta(K_1, K_2)$，为的是找到上述(c′)所需要的一种替换条件，其类型为

$$\lim\inf \theta(K, S_h) > 0.$$

(*) 正如 J. L. Joly 诚恳地对作者指出，在引理中错误地遗漏了加添假设 $\mathring{K} \cap S \neq \emptyset$：出现在证明中的向量 $u_0 \in \mathring{K}$ 实际上必须改为向量 $u_0 \in \mathring{K} \cap S$.



这类得出(c′)的结论所需要的条件，也可从如下略述的平凡例子中得到启示:

(d) 设 X 是 Hilbert 空间, (P_h)是 X 上一对称线性算子序列,使得

$$v=\text{strong}\lim P_h v,\quad \text{对于每一 } v\in X,$$

若 K 是 X 的有界闭凸子集,则

$$P_h K=\{v\in X:\ v=P_h w,\ w\in K\}$$

是 X 的有界闭凸子集,且

$$K=\lim P_h K.$$

有关证明见作者的论文[4]的引理1.5[$P_h K$ 对每一给定的 h 是闭的,这可从如下看出:设 $v=\lim\limits_j P_h w_j$, $w_j\in K$; 因 K 有界且弱闭，存在(w_j)的一子序列(w'_j)弱收敛于一向量 $w_0\in K$;因此,对每一 $z\in X$,我们有

$$\begin{aligned}0&=\lim_j(w'_j-w_0|P_h z)=\lim_j(P_h w'_j-P_h w_0|z)\\&=(v-P_h w_0|z),\end{aligned}$$

故有 $v=P_h w_0$. ∎

(d)的一个重要的特殊情形如下

(d′) 设 X 是 Hilbert 空间，(X_h)是 X 的有限维子空间的递增序列，$\bigcup\limits_h X_h$ 在 X 中稠密，且对每一 h, P_h 是 X 到 X_h 上的正交投影. 则上述(d)的结论成立.

通过简单的例子可以证明，若 K 无界，则投影集合 P_hK 可以不收敛于 K，即使 K 是 X 的闭线性子空间（见上述引用文献的附注 1.3）.

一个充分条件是对每一 h 有包含关系 $P_hK\subset K$. 还要注意到，若 K 无界，则投影集合 P_hK 甚至不必是闭的：考虑实函数 $y=1/x$, $x>0$ 的上图在 Euclid 平面 x, y 的 x 轴上的正交投影.

在作者的论文[4]与[5]中，还就关于偏微分算子的某些扰动边值问题方面，研究了在 Sobolev 空间中凸集收敛序列的进一步的例子．这方面也可看 L. Boccardo[1].

在后面 §6 中，将研究出现在 Sobolev 空间的内或外逼近理论中的某些例子.

最后，让我们还指出上面引用的 J. L. Joly 的论文也给出了在逼近理论中的应用.

§3 “稳定性”定理

现让我们研究含有一映射 A 及一凸集 K 的变分不等式，其解 u 怎样依赖于集合 K：这是映射 $K\mapsto u$ 的连续性问题，并且按照前一节描述过的凸集的拓扑以及空间 X 中的弱或强拓扑来研究它.

我们将首先假设映射 A 保持固定而允许 K 变化，后面将提到 A 与 K 怎样的共同扰动是在考虑之列的.

让我们考虑“原始”问题

(21) $$u\in K: \ (Au, v-u)\geqslant 0 \quad \forall v\in K$$

以及一族“扰动”或“近似”问题，形如

(22) $$u_h\in K_h: \ (Au_h, v-u_h)\geqslant 0 \quad \forall v\in K.$$

我们将假设 $(K_h)_h$ 是一集合序列. 然而, 也可以允许是任何有向族,而只须对下文作少许修改.

上述考虑的问题的有关主要结果陈述如下

定理 2 设 X 是自反 Banach 空间,而且

(i) A 是在 X 中的、X 的一区域 $D(A)$ 的一有界单调和半连续的映射,

(ii) $(K_h)_h$ 是 $D(A)$ 的一子集序列,按照 §2 定义 1, 它收敛于 $D(A)$ 的一凸子集 K.

此外, 假设对每一 h, 存在扰动问题(22)的一解 u_h, 且序列 $(u_h)_h$ 在 X 中有界.

则原始问题(21)至少有一个解; 又若此解为 u 是唯一的, 则 u_h 在 X 中弱收敛于 u,而且

$$(Au_h - Au,\ u_h - u) \to 0.$$

证明 让我们首先证明:

(a) **近似解一子序列 $(u_{h_j})_j$ 在 X 中的任何弱极限 u 是原始问题的一个解.**

为了简化记号,这里把(u_h)叫做子序列. 因此,对每一 h, 我们有

$$u_h \in K_h: \quad (Au_h,\ w - u_h) \geqslant 0 \quad \forall w \in K_h.$$

由假设(ii),我们有 $w\text{-}\lim\sup K_h \subset K$,因此 $u \in K$.

另一方面,我们还有 $K \subset s\text{-}\lim\inf K_h$, 所以, 每一 $v \in K$ 是一序列 (v_h) 的强极限, 其中 $v_h \in K_h$, 对一切 h. 我们可在上述不等式中取 $w = v_h$, 并通过把它写成

$$(Au_h,\ v - u_h) \geqslant (Au_h,\ v - v_h),$$

使 v 在不等式中出现.

在不等式的左边利用 A 的单调性,得到

$$(Av,\ v - u_h) \geqslant (Au_h,\ v - v_h),$$

然后对 h 取极限：因 A 有界，序列 $(Au_h)_h$ 是有界的，因为 $(u_h)_h$ 是有界的；因此我们求得

$$(Av,\ v-u)\geqslant 0.$$

所以我们推出 u 是线性化问题

$$u\in K:\ (Av,\ v-u)\geqslant 0\quad \forall v\in K$$

的解，又因我们满足第一章线性化引理的假设，这也意味着 u 是问题(21)的一个解.

在我们的证明中，第二步是

(b) **存在问题(21)的一个解 u，并且若(21)的解是唯一的，则整个序列 $(u_h)_h$ 在 X 中弱收敛于 u.**

因 X 是自反的，从(a)以及存在近似解的有界序列 (u_h) 的假设，得出一个解 u 的存在性. 然后只要我们再一次考虑到(a)，u_h 到 u 的弱收敛性是 u 的唯一性的明显推论，如果 u 是唯一的话.

最后一步是证明

(c) $$(Au_h-Au,\ u_h-u)\to 0.$$

仍由假设 $K\subset s\text{-}\lim\inf K_h$，我们可对每一 h，确定一向量 $z_h\in K_h$，使它们强收敛于 u.

另一方面，因 u_h 是(22)的解，对所有 h 有

$$(Au_h,\ z_h-u_h)\geqslant 0.$$

现将此不等式写成使 u 出现在其中，

$$(Au_h,\ u-u_h)\geqslant(Au_h,\ u-z_h),$$

然后对 h 取极限. 因 A 有界，u_h 弱收敛于 u，得到

$$\limsup_h(Au_h,\ u_h-u)\leqslant 0,$$

因此，

$$\limsup_h(Au_h-Au,\ u_h-u)<0,$$

利用 A 的单调性，这显然等价于上述(c).

附注 2 在应用中出现的许多算子 A 具有这样的性质：X 的一序列 u_h 到一向量 u 的弱收敛性连同式

$$(Au_h - Au,\ u_h - u)$$

到 0 的收敛性蕴涵 X 中 u_h 到 u 的强收敛性. 此类算子常常称为是(s)型的，见 F. E. Browder[15]. 此类情形，例如，当 A 是强单调

(23) $$c\|v-u\|^2 \leqslant (Av-Au,\ v-u) \quad c>0,$$

或更一般地，当 A 满足条件

(24) $$\gamma(\|u-v\|) \leqslant (Au-Av,\ u-v),$$

而 $\gamma: R_+ \mapsto R_+$ 是任意的在 0^+ 连续和严格递增的函数，且 $\gamma(0)=0$. [若空间 X 一致凸，则此条件可稍有减弱，见 H. Brezis-M. Sibony[1].] 让我们还注意到，对于包含一泛函 F 的极小问题，与条件(c)类似的条件是连同 u_h 到 u 和 $F(u_h)$ 到 $F(u)$ 的弱收敛性应当蕴涵 u_h 到 u 的强收敛性，为大家熟悉的此类情形，例如，当 F 是一致凸 Banach 空间的范数.

关于这一点，也可见下面定理 2 的推论.

附注 3 若同时还要考虑映射 A 的近似，则问题(22)应替换为问题

(25) $$u_h \in K_h:\ (A_h u_h,\ v-u_h) \geqslant 0 \quad \forall v \in K_h,$$

其中 A_h 是所设的 A 的一个适当的扰动，定义域 $D(A_h)$ 在 X 中包含 K_h，值域在 X^* 中.

实际上，若各映射 A_h 是一致有界、单调和半连续(hemi-)的，且在积空间 $X\times X^*$ 的强拓扑中满足收敛性条件

(26) $$\text{graph } A \subset s\text{-}\lim\inf \text{graph } A_h, \quad \text{在 } X\times X^* \text{ 内},$$

则(25)代替(22)的、与定理 1 类似的结论可沿相同的线索证明，见 U. Mosco[4]

〔映射序列 (A_h) 在 X 上**一致有界**，如果对 X 的任何有界子集 B，存在 X^* 的一有界子集 B'，使得

$$A_h(B\cap D(A_h))\subset B',\quad 对所有 h.〕]$$

如下结果包含在定理 2 中，因为它可利用第一章讨论过的极小问题的上图形式来证明：

定理 2 的推论 设 $f: X\mapsto(-\infty, +\infty]$ 凸，而 $f_h: X\mapsto(-\infty, +\infty]$ 使得在 X 中按照 §2 的定义有 $f=\lim f_h$. 假定对每一 h，存在一向量 u_h 极小化 f_h，且序列 $(u_h)_h$ 有界. 则存在一向量 u 极小化 f；而且，若 u 是唯一的极小化向量，则 u_h 弱收敛于 u，且 $f_h(u_h)$ 收敛于 $f(u)$.

证明 将定理 2 应用于积空间 $X\times R$ 到 $X^*\times R$ 内的映射 0×1，以及 $X\times R$ 的凸子集 $K=\operatorname{epi} f$ 和 $K_h=\operatorname{epi} f_h$，并且利用第一章 §9 的引理 3.]

类似地，我们可以考虑混合变分不等式

$$u\in X:\ (Au,\ v-u)\geqslant f(u)-f(v),\quad \forall v\in X,$$

及扰动不等式

$$u_h\in X:\ (Au_h,\ v-u_h)\geqslant f_h(u_h)-f_h(v),\quad \forall v\in X,$$

或者甚至取 $A=A_h$ 也依赖于 h，然后利用上图形式连同定理 1 或它在 $A=A_h$ 时的推广，得到关于扰动解 u_h 的收敛性结果. 对这一点更详细的说明可参看 U. Mosco[4]. 也可见下面的定理 4.

在下节中，我们将应用定理 2，以便得到关于变分不等式及有关问题的进一步的存在性结果.

在 §6 中，我们将应用定理 2，证明变分不等式或极小问题解的某些有限维逼近方案的收敛性.

我们还应注意到，定理 2 对于研究边值问题的解对加在解上(也可能是单侧)的约束的连续依赖，也是有效的.

这方面的某些应用可以在作者的论文[4], [5] 以及在 L. Boccardo[1] 中找到.

§4 进一步的存在定理

本节始终假设 X 是可分自反 Banach 空间.

可分性的假设, 它对于下面将证明的存在性结果的普遍正确性并非是必须的, 实际上必须看到, 我们将从 §3"稳定性"定理导出我们的结果, 而在此定理中只允许有扰动集合 K_h 的序列. 为了去掉这个假设, 代替定理 2, 我们将依据关于有向族 (K_h) 的类似的稳定性结果.

现在让我们证明一般的存在性定理, 即我们在第二章最后一节中陈述的定理 5. 除空间的可分性外, 我们现在证明的定理还假设 A 是有界的.

定理 3 设 A 是 X 到 X^* 内的一有界、单调、半连续(hemicontinuous) 的映射, K 是 X 的一闭凸子集. 设或者 K 有界, 或者 A 在 K 上满足如下强制性条件

(d_0) 存在 $v_0 \in K$ 和 $R>0$, 有 $\|v_0\|<R$, 使得

$$(Av,\ v-v_0)>0 \quad 对于所有\ v\in K,\ \|v\|=R.$$

则问题

$$u\in K:\ (Au,\ v-u)\geqslant 0 \quad \forall v\in K \tag{27}$$

存在一个解 u.

证明 根据 X 的可分性, 我们可求得 K 的有限维闭凸子集 K_h 的一递增序列, $v_0\in K_1$, 使得

$$K=\bigcup_h K_h \quad 在\ X\ 中的闭包$$

现应用第二章的有限维的存在定理, 证明对每一 h, 问题

$$u_h\in K_h:\ (Au_h,\ v-u_h)\geqslant 0 \quad \forall v\in K_h \tag{28}$$

存在一解 u_h，使得

$$\|u_h\| \leqslant R \quad \text{对所有 } h,$$

当 K 无界，R 是出现在条件(d_0)中的常数，当 K 有界，R 是足够大的任意正常数。

设 h 是固定的，X_h 是 X 的一包含 K_h 的 n 维子空间，$n=n_h$。

设

$$\pi_h: \ E^n \mapsto X$$

是一内射(injective)映射，$\pi_h(E^n)=X_h$，并设

$$\pi_h^*: \ X^* \mapsto E^n$$

是 π_h 的转置，则

$$(w^*, v)=(y|x), \quad v=\pi_h x, \ y=\pi_h^* w^*$$

集合

$$C_h=\pi_h^{-1}K_h$$

是 E^n 的一闭凸子集，并且有界，如果 K_h 是有界的话。

而且，映射

$$A_h=\pi_h^* A \pi_h: \ E^n \mapsto E^n$$

是连续的. [事实上，π_h 从 E^n 到 X 是显然连续的，A 从 X 到赋予弱拓扑(见第一章附注 8)的 X^* 是连续的，而 π_h^* 从赋予拓扑的 X^* 到 E^n 也是连续的.] 最后，若 K_h 并因而 C_h 是无界的，则由假设(d_0)，我们有

$$(A_h x | x-x_0)=(A\pi_h x, \ \pi_h x-\pi_h x_0)=(Av, \ v-v_0)>0,$$

其中 $x_0=\pi_h^{-1}v_0 \in C_h$，对所有 x 使得 $v=\pi_h x \in K$，且 $\|v\|=R$，特别地，对所有使得 $\|\pi_h x\|=R$ 的 $x \in C_h$。

现在我们能够应用第二章的定理 1，只要取 $K=C_h$ 和 $B=\{x \in E^n: \|\pi_h x\| \leqslant R\}$，可得知

$$x \in C_h: \ (A_h x | y-x) \geqslant 0 \quad \forall y \in C_h$$

存在一解 $x \in C_h \cap B$，从而 $u_h=\pi_h x$ 是问题(28)的一个解，且

$$\|u_h\|=\|\pi_h x\| \leqslant R.$$

因此，我们证明了存在一有界的近似解序列(u_h). 于是定理的结论是稳定性定理的一个推论. ∎

附注 4 若映射 A 仅在非开域 K 上有定义，则半连续性(hemicontinuity)假设必须加强. 事实上，这时从半连续性(hemi-)不一定得出 A 的半连续性(demicontinuity)(参看第一章附注 8)，甚至我们也不能断定 A 从 K 的有限维截面 $K\cap X_h$ (X_h 是 X 的任意的有限维子空间) 到 X^* 的弱拓扑是连续的. 但是，这后一性质在上面表明 A_h 连续性的证明中是必须的. 所以，当 A 有非开的定义域时，后一性质必须是"预先的"作为代替半连续性(hemi-)的假设. ∎

附注 5 从第一章我们知道，问题 (27) 所有解的集合是闭和凸的. 在上述定理 3 的假设下，还可得出此集合是有界的. 若 K 有界，这实际上是明显的. 若 K 无界，则任一解 u 按范数以出现在定理的条件 (d_0) 中的 R 为界. 事实上，若 $\bar{u}$ 是(27)的解有 $\|\bar{u}\|>R$，因至少存在一解 u 有 $\|u\|<R$，且全体解的集合是凸的，故存在一解 $\tilde{u}$ 有 $\|\tilde{u}\|=R$，由此

$$(A\tilde{u},\ \tilde{u}-v_0)\leqslant 0,$$

这与 (d_0) 矛盾. ∎

附注 6 强制性条件 (d_0) 显然可替换以更强的条件

(d_1) **存在 $v_0\in K$，使得**

$$(Av,\ v-v_0)\to+\infty \quad \text{当 } \|v\|\to\infty,\ v\in K.$$

(参见第二章 §4 引理 4). ∎

对于如下类型的不等式

$$(29)\qquad x\in X:\ (Au,\ v-u)\geqslant F(u)-F(v)\quad \forall v\in X,$$

现从定理 3，通过利用在第一章 §5 和 §9 早已讨论过的此问题的上图形式，导出一存在定理.

定理 4 设 A 是 X 到 X^* 内的有界、单调和半连续

(hemi-)的映射，F 是 X 上的取值在 $(-\infty, +\infty]$ 内的下半连续凸泛函．设 A 与 F 满足如下强制性条件：

(d_0') 存在 $R>0$ 与 $v_0\in X$，有 $\|v_0\|<R$ 和 $F(v_0)<+\infty$，使得

$$(Av, v-v_0)+F(v)-F(v_0)>0, \quad \forall v\in X, \|v\|=R.$$

则上述问题(29)有一解 u.

附注 7 条件 (d_0') 显然可替换以更强条件：

(d_1') 存在 $v_0\in X$，有 $F(v_0)<+\infty$，使得

$$(Av, v-v_0)+F(v)\to+\infty, \quad \text{当 } \|v\|\to+\infty.$$

(参看上述附注 6).

让我们还注意到，若 F 的有效定义域是有界的，则 (d_0') 自动地被满足，因只须取具有 $F(v_0)<+\infty$ 的任意的 v_0，而取 R 足够大，使得当 $\|v\|=R$ 时总有 $F(v)=+\infty$.

定理 4 的证明．利用第一章 §5 和 §9 的上图形式，问题(29)可等价地表示为

$$\text{(30)} \qquad \tilde{u}\in\tilde{K}: \ (\tilde{A}\tilde{u}, \tilde{v}-\tilde{u})\geqslant 0 \quad \forall\tilde{v}\in\tilde{K},$$

其中

$$\tilde{A}=A\times 1$$

而

$$\tilde{K}=\mathrm{epi}\ F$$

正如我们从第一章 §7 所知，求上述不等式的一解 u，只须求出 $\tilde{K}$ 的一向量 $\tilde{u}$，它是(30)的一局部解.

为了求出这样的一个局部解 $\tilde{u}=[u, \alpha]$，让我们考虑辅助问题

$$\text{(31)} \qquad \tilde{u}\in\tilde{K}_R, \ (\tilde{A}\tilde{u}, \tilde{v}-\tilde{u})\geqslant 0 \quad \forall\tilde{v}\in\tilde{K}_R.$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{K}_R&=\tilde{K}\cap(B_R\times I)\\ &=\{[v, \beta]\in X\times R: F(v)\leqslant\beta, \|v\|\leqslant R, a\leqslant\beta\leqslant b\}\end{aligned}$$

是 F 的上图 $\tilde{K}$ 与"柱形" $B_R\times I$ 的交，这里

$$B_R=\{v\in X: \|v\|\leqslant R\}$$

是半径为出现在条件 (d_0') 中的常数 R 的 X 的闭球，而

$$I=[a,\ b]$$

是实轴的一闭有界区间，我们假定把它取得足够大，这将在后面详细说明.

因映射 $\widetilde{A}$ 在 $X\times\mathbb{R}$ 显然有界、单调且半连续，而 $\widetilde{K}$ 是 $X\times\mathbb{R}$ 的有界闭凸子集，因此存在问题(31)的一个解 $\tilde{u}=[u,\ \alpha]$ 是定理3的一个推论.

为了证明 $\tilde{u}=[u,\ \alpha]$ 也是原始问题(30)的一个局部解，只须证明 $\tilde{u}$ 不属于"柱形" $B_R\times I$ 的边界，也就是说，有

$$\|u\|<R \quad 和 \quad a<\alpha<b. \tag{32}$$

现设 a 和 b 这样选取，使得满足

$$a<-c_0R-c_1, \tag{33}$$

其中 $c_0>0$ 和 $c_1>0$，使得

$$F(v)\geqslant-c_0\|v\|-c_1, \quad 对于所有 v\in X.$$

[任何下半连续凸的 F，能够有这种形式的下界]，且

$$b>\|Av_0\|(R+\|v_0\|)+F(v_0), \tag{34}$$

v_0 是出现在条件 (d_0') 中的向量.

现在让我们把 $\widetilde{K}_R$ 解释为交

$$\widetilde{K}_R=(\mathrm{epi}F_R)\cap(X\times I),$$

这是由在球 B_R 之外取 $F\equiv+\infty$ 而得的泛函 F_R 的上图与"带" $X\times I$ 的交. 注意 $F_R\not\equiv+\infty$，因为 $F_R(v_0)=F(v_0)<+\infty$. 而且，由前面 a 的取法(33)，我们有

$$a\leqslant\inf F_R, \quad 实际上 a<\inf F_R.$$

[实际上，由(33)，有

$$a<-c_0R-c_1\leqslant-c_0\|v\|-c_1\leqslant F(v), \quad 对于所有 \|v\|<R,$$

因此 $a<\inf F_R$.]

于是，由第一章§9引理3和附注17，因 $\tilde{u}=[u,\ \alpha]$ 是不

等式(31)的解，故 u 是混合不等式

$$(35) \qquad u\in X: \ (Au,\ v-u)\geqslant F_R(u)-F_R(v), \quad \forall v\in X,\ F_R(v)\leqslant b$$

的解，而且 $\alpha=F_R(u)$.

在(35)中取 $v=v_0$ [注意由(34)有 $F_R(v_0)=F(v_0)<b$]，我们得出 $F_R(u)<+\infty$，因此 $F_R(u)=F(u)$，并由此

$$(36) \qquad (Au,\ v_0-u)\geqslant F(u)-F(v_0).$$

根据条件 (d_0')，由(36)得到 $\|u\|<R$，这就证明了(32)中第一个严格的界. 剩下证明关于 α 的界. 仍由(36)及 A 的单调性，我们有

$$\alpha=F_R(u)=F(u)\leqslant(Av_0,\ v_0-u)+F(v_0)$$
$$\leqslant\|Av_0\|(\|v_0\|+R)+F(v_0),$$

因此根据 b 的取法(34)，$\alpha<b$. 另一方面，正如已经看到的，我们同样有

$$\alpha=F_R(u)\geqslant\inf F_R>a. \ \rule{0.5em}{1em}$$

附注 8 定理 4 从上述定理 3 推导出，但它显然又蕴涵定理 3(通过取 $F\equiv 0$ 而得到)以及第二章的——定理 4——直接存在定理(通过取 $A=0$ 而得到). ■

关于象(29)这样一类混合变分不等式的存在定理，O. Lescarre[1]，J. Lions, G. Stampacchia[1]，F. E. Browder[8]，[9]，R. T. Rockafellar[6] 曾经给出. 定理 4 实质上归于 F. E. Browder 上述引文. 也可见 U. Mosco[2]，上面给出的证明取自于此.

本节的余下部分，我们将应用定理 3，证明 Hilbert 空间 V 的一闭凸子集 K 到 V 内的内向非扩张映射

$$U:\ K\mapsto V$$

的不动点的存在性.

回想一下，U 称为内向映射，如果对每一 $v\in K$，向量 Uv 属于某射线

$$v+\lambda(z-v), \quad z\in K,\ \lambda\geqslant 0.$$

显然，任何 K 到 K 内的映射是内向映射，因为我们可以取 $z=Uv$ 和 $\lambda=1$.

如下广义 Schauder 定理，归于 F. E. Browder[11]：

定理 5 设 U 是 Hilbert 空间 V 一有界闭凸子集 K 到 V 内的一内向非扩张映射，$K\neq\emptyset$，则 U 在 K 内有一不动点. 而且，U 的所有不动点的集合是 K 的一闭凸子集.

证明 从第一章 §4 知道，u 是 U 的不动点，即

$$Uu=u$$

当且仅当 u 是变分不等式

$$u\in K:\ (\mathscr{A}u|v-u)\geqslant 0 \quad \forall v\in K \tag{37}$$

的一个解，其中

$$\mathscr{A}=I-U, \quad I=V \text{ 的恒同映射}.$$

注意到如下引理 2，(37)的解 u 的存在性，以及(37)的全体解的集合的性质，可作为上述定理 3 及第二章定理 5 的附录 1 的推论而得到. ∎

引理 2 设 U: $K\mapsto V$ 是非扩张的. 则映射 $\mathscr{A}=I-U$ 是单调的和 Lipschitz 的，特别地，是有界的和连续的.

证明 对于 K 的所有的 v, w, 我们有

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}v-\mathscr{A}w|v-w)&=\|v-w\|^2-(Uv-Uw|v-w)\\&\geqslant\|v-w\|^2-\|Uv-Uw\|\,\|v-w\|\\&\geqslant(1-c)\|v-w\|^2,\end{aligned}$$

只要有
$$\|Uv-Uw\|\leqslant c\|v-w\|.$$

所以，若 U 是非扩张的($c=1$)，则 $\mathscr{A}=I-U$ 单调. 而且

$$\|\mathscr{A}v-\mathscr{A}w\|^2=\|v-w\|^2-2(Uv-Uw|v-w)+\|Uv-Uw\|^2$$
$$\leqslant 4\|v-w\|^2,$$
因此 $\mathscr{A}$ 是 Lipschitz 的. ▌

附注 9 若 U 是收缩的（在上述不等式中 $c<1$），则 $\mathscr{A}=I-U$ 是强单调的. "单调性"与"非扩张性"间更精确的关系，可在 F. E. Browder[13] 和 Z. Opial[1] 中找到. 关于不动点的构造，还见 F. E. Browder–W. V. Petryshyn[1][2], S. Kaniel[1].

关于非扩张映射的不动点与迭代解法的一份评注性的参考资料可见于 D. G. de Figuerido[1].

§5 有限维逼近 I：离散问题

在应用中，变分不等式数值解的大部分方法，基本上可以纳入我们在本章开头讨论的 Ritz-Galerkin 框架之中.

让我们简要地概述一下，下面两点是重要的：第一，得到一个逼近解 $u_h(x)$ 的一个逼近问题；第二，实际上可以进行 $u_h(x)$ 的数值计算的一个离散问题. 我们将逼近解 $u_h(x)$ 收敛至给定问题解 $u(x)$ 的收敛性的讨论推迟到下节. 所以离散化参数 h 在本节中总是作为固定的.

和 §1 一样，为了方便起见，假设空间 X 的元为函数.

我们从原始问题

(38) $\qquad u\in K:\ (Au,\ v-u)\geqslant 0\quad \forall v\in K$

开始，它包含有一个赋范空间 X，一个将 X 映入 X^* 的映射 A 和 X 的一个凸子集 K.

[这些都作为我们的已知资料来考虑，然而，同样的问题可能由于引入不同的 X, A 及 K 而给出不同形式. 一个新

的形式本质上可以由问题的原来形式产生，也可由技术上的考虑而提出来.

我们将看到关于包含有偏微分算子的问题中常用的有限差分法的一个例子.]

考虑下面一个逼近问题

(39) $u_h\in K_h$: $(Au_h,\ v_h-u_h)\geqslant 0\quad \forall v_h\in K_h$,

我们一定要能够方便地选择 X 的一个有限维子空间 X_h 及 X_h 的一个凸子集 K_h.

[我们也可以考虑映射 A 的一个逼近 A_h, A_h 是 X 到 X^* 的一个映射,其定义域 $D(A_h)$ 包含 K_h,因而逼近问题变成

$$u_h\in K_h:\ (A_hu_h,\ v_h-u_h)\geqslant 0\quad \forall v_h\in K_h$$

这里的配对$(.,.)$是 X 和 X^* 之间的对偶积.]

进而在 X_h 选择基

(40) $$\{\varphi_1^h(x),\ \cdots,\ \varphi_n^h(x)\}$$

$n=n_h$ 为 X_h 的维数，让我们考虑与逼近问题(39)联系的,在欧氏空间 E^{n_h} 中的一个离散问题

(41) $u^h\in C^h$: $(A^hu^h|v^h-u^h)\geqslant 0\quad \forall v^h\in C^h$.

这里 A^h 是 E^n 映入 E^n 的映射，C^h 为 E^n 中的凸子集,它们由 A 及 K_h 得到,如下所示.

令 $$\pi_h:\ E^n\mapsto X$$

是使 E^{n_h} 的向量

$$v^h=(v_q^h)_q$$

产生 X 中的函数

(42) $$v_h(x)=\sum_q v_q^h\varphi_q^h(x)$$

的内射映射.

显然 $$\pi_h(E^n)=X_h,$$

因而 π_h 是 E^n 映到 X_h 上的一个(按范数)同构.

因此，存在 E^n 的唯一凸子集 C^h，使得

$$\pi_h C^h = K_h$$

显然，$C^h = \pi_h^{-1} K_h$.

[C^h 的实际确定事实上会出现一些困难，它依赖于 X_h 及基 $\{\varphi_q^h\}$ 的选择，因而依赖于 π_h 的选择，而后者已经被确定. 关于这点亦可参看下面注 10.]

此外，映射 π_h 有转置

$$\pi_h^*: \quad X^* \mapsto E^n$$

其核为 X^* 中 X_h 的零化子(annihilator)，且

$$A^h = \pi_h^* A \pi_h$$

为 E^n 映到 E^n 内的映射.

对于 E^n 所有的向量 v^h 及 w^h，我们有

$$\begin{aligned}(A^h v^h \mid w^h) &= (\pi^* A \pi_h v^h \mid w^h) = (A\pi_h v^h,\ \pi_h w^h)\\ &= (Av_h(x),\ w_h(x))\end{aligned}$$

其中 $$v_h(x) = \pi_h v^h, \quad w_h(x) = \pi_h w^h.$$

因此，向量 $u^h \equiv (u_q^h) \in E^n$ 是离散问题(41)的解当且只当函数 $u_h(x) = \pi_h u^h$，即

$$u_h(x) = \sum_q u_q^h \varphi_q^h(x) \tag{43}$$

是逼近问题(39)的解.

[事实上有

$$(A^h u^h \mid v^h - u^h) = (Au_h,\ v_h - u_h)$$

其中 $v_h = \pi_h v^h$，$u_h = \pi_h u^h$，且 π_h 是 C^h 映到 K_h 上的 1-1 映射.]

为明确地写出问题(41)，让我们计算 E^n 中向量 $A^h u^h$ 在 E^n 的典范基

$$e_s^h \equiv (\delta_{qs}^h)_q, \quad s = 1, \cdots, n$$

中的分量 $(A^h u^h)_s = (A^h u^h | e_s^h)$. $s=1, \cdots, n$.

我们有

$$(A^h u^h)_s = (\pi_h^* A \pi_h u^h | e_s^h) = (A\pi_h u^h, \pi_h e_s^h)$$

因为 $$\pi_h e_s^h = \varphi_s^h(x),$$

我们有 $$(A^h u^h)_s = (Au_h(x), \varphi_s^h(x))$$

因而，$(A^h u^h)_s$ 用 u^h 的分量 $(u_q^h)_q$, 按照 § 1 中所引入的同样的函数 $A_s^h(u_1^h, \cdots, u_n^h)$ 表示为：

(44) $$(A^h u^h)_s = A_s^h(u_1^h, \cdots, u_n^h)$$
$$= (A(\sum_q u_q^h \varphi_q^h), \varphi_s^h), \quad s=1, \cdots, n.$$

因此，离散问题(41)与 § 1 的离散问题，即

(45) $$u^h \equiv (u_q^h) \in C^h: \sum_s A_s^h(u_1^h, \cdots, u_n^h)(v_s^h - u_s^h) \geqslant 0$$
$$\forall v^h \equiv (v_q^h) \in C^h$$

是相同的.

在本讲义中我们不讨论这个离散问题的数值解方法.

让我们仅仅指出若映射 A^h 为强单调的，则可以用第二章的迭代方法.

另一方面，若 A 是一个凸泛函的梯度，因而(38)的解也是在 E^n 的一个凸子集上使一个凸函数最优化的向量，则(38)的数值解可用凸优化中几个有效的方法之一来进行，例如，参看 J. Cea[2].

对线性的 A，象线性规划典型方法那样的主元方法(pivoting methods)亦可尝试. 我们将在本章最后一节看到这方面的一个例子.

附注 10 在离散问题(41)与逼近问题(39)的联系中，欧氏度量及典范基 $e_1 = (\delta_{q1})_q, \cdots$ 所起的作用可以由任意的内积 $(.|.)$ 和相对于该内积的任意正交基取代. 这种改变自然

地影响映射 π_h 及它的转置 π_h^*，因此也影响 $\mathbb{R}^n$ 中的子集 C^h 及 E^n 映入自己的映射 A^h.

因为离散问题(45)将要被修改，因此新度量和新基的适当选择可以使(45)的实际数值解易于进行. 关于这点，让我们重温第二章 §3 附注 8.

[映射 π_h 仍是 R^n 映到 X 内的线性映射，它使在 R^n 中选择的新基 $(\tilde{e}_s)_s$ 中的向量 $\tilde{e}_s$ 产生 X_h 的基(40)的函数 φ_s^h; 因此对任何 $v^h\in R^n$, $\pi_h v^h$ 再次由(42)给出，其中 $(v_q^h)_q$ 现在是 v^h 在基 $(\tilde{e}_s)$ 内的分量. 虽然子集 $C^h=\pi_h^{-1}K_h$ 只根据 π_h 的变化而变化，但映射 $A^h=\pi_h^*A\pi_h$ 也受转置 π_h^* 所依赖的度量的变化所影响. 注意若 v^h 及 u^h 的分量 $(v_q^h)_q$, $(u_q^h)_q$ 现在是对 R^n 的新基取的，则离散问题仍由上面的(45)给出，其中映射 A^h 和以前一样.] ❚

附注 11 当 A 是 X 上一个(凸)泛函 F 的微分 DF 时，我们知道变分不等式(38)刻划了极小问题

(46) $\qquad u\in K$ 在 K 上使 F 极小

的一个解 u.

这提示我们可以由逼近问题

(47) $\qquad u_h\in K_h$ 在 K_h 上使 F 极小，

来直接解极小问题(46)，因而，只要在 X_h 中选好基 $(\varphi_s^h)_s$ 就可以数值解离散欧氏问题

(48) $\qquad u^h\in C^h$ 在 C^h 上使 $\tilde{F}$ 极小，

这里 $C^h=\pi_h^{-1}K_h$, $\tilde{F}=F\cdot\pi_h$, 即

$$\tilde{F}(v_1^h, \cdots, v_n^h)=F\left(\sum_q v_q^h\varphi_q^h\right),\quad v^h\equiv(v_q^h)_q\in E^n.$$

注意，与上述离散极小问题联系的离散变分不等式，即

$$u^h\in C^h:\ (\nabla F(u^h)\,|\,v^h-u^h)\geqslant 0\quad \forall v^h\in C^h$$

与变分不等式(45)是相同的，其中

$$A_s^h(u_1^h, \cdots, u_n^h)=(DF(\sum u_q^h\varphi_q^h), \varphi_s^h),$$

即我们可由离散化与原来问题(46)联系的变分不等式

$$u\in K: (DF(u), v-u)\geqslant 0 \quad \forall v\in K$$

来得到上述结果.

事实上，我们有

$$\nabla\widetilde{F}=\pi_h^* DF\pi_h$$

而且由于 $\pi_h e_s=\varphi_s^h$ 及 $\pi_h u^h=u_h=\sum u_q^h\varphi_q^h$，故 $\nabla\widetilde{F}(u^h)$ 在 E^n 的典范基 (e_s) 的分量由

$$\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_s^h}(u^h)=(\nabla\widetilde{F}(u^h)\,|\,e_s)=(DF(\sum u_q^h\varphi_q^h), \varphi_s^h)$$

给出. 因此 Riesz–Galerkin 离散化及极小问题的弱特征是“可交换”的运算.

§6 有限维逼近 II: 逼近解的收敛性

为了使逼近解 $u_h(x)$ 收敛到原始问题的解 $u(x)$，我们现在给出映射 A 及逼近凸集 K_h 所需附加的条件.

如稳定性定理所示，序列 $(u_h(x))$ 所期望的最自然的收敛性是在空间 X 上 $u_h(x)$ 至 $u(x)$ 的**弱收敛性**，以及经 A 作用同时使得型 (Au_h-Au, u_h-u) **收敛到零**. 正如我们在 §3 所说，对于按定义为类型 (s) 的全体映射类来说，则立即得到 $u_h(x)$ 到 $u(x)$ 在空间 X **依范数的收敛性**.

然而，让我们注意，我们不能象在方程 $Au=f$ 类似的逼近一样，得出同样类型误差 $\|u-u_h\|$ 的估计. 关于这点参看下面注 15.

考虑到第二章的有限维存在性定理，我们可以用一个“构

造性的"存在性定理的形式陈述§3的稳定性定理，这样更适合我们现在的目的.

定理 6 令 A 是一个将 X 映入 X^* 的有界，严格单调和半连续的映射.

令 K 是 X 的一个闭凸子集，$K\neq\emptyset$，$(K_h)_h$ 是 X 的有限维闭凸子集的序列，使得根据§2定义1，有

$$K=\lim K_h \quad \text{在 } X \text{ 内},$$

进一步假设下述强制性条件成立：

存在 $v_0\in\bigcap_h K_h$，使得

$$(\tilde{d}_1) \qquad (Av,\ v-v_0)\to+\infty \quad \text{当 } \|v\|\to+\infty \text{ 时},$$

则对每个 h，问题

$$u_h\in K_h \quad (Au_h,\ v_h-u_h)\geqslant 0 \quad \forall v_h\in K_h$$

存在唯一解 u_h，并且问题

$$u\in K: \ (Au,\ v-u)\geqslant 0 \quad \forall v\in K$$

存在唯一解 u.

再者，u_h 在 X 中弱收敛到 u，以及 $(Au_h-Au,\ u_h-u)$ 收敛到零.

推论 此外，若 A 是类型(s)的，则 u_h 在 X 中强收敛至 u.

证明 一旦我们证明了有界的逼近解序列 u_h 的存在性，定理6就化为定理2的特殊情形. 对于每个给定的 h，将定理3应用到映射 A 及集合 K_h，可以证明 u_h 的存在性. 让我们仅注意到，若 K_h 是无界的，则在定理3中所需要的强制性性质(d_0)，现在是我们给出的假设$(\tilde{d}_1)$的明显的推论(参看上述注6). 序列(u_h)的有界性是$(\tilde{d}_1)$的进一步推论：事实上，若 v_0 为出现在$(\tilde{d}_1)$中的向量，$v_0\in K_h$，因而，对每个 h

$$(Au_h,\ u_h-v_0)\leqslant 0,$$

由$(\tilde{d}_1)$，这明显蕴含了序列(u_h)在 X 中是有界的. ▌

附注 12 定理 6 的假设$(\tilde{d}_1)$特别要求逼近集 K_h 有一非空交集.

避开这个假设的一个更一般的条件，可在例如 U. Mosco [4] 中定理 3 找到. 亦可参看下面的注.

附注 13 定理 6 的条件$(\tilde{d}_1)$可换为关于 A 的下述假设：存在一个在 0^+ 连续且严格增加，并满足 $\gamma(0)=0$ 及 $r\to+\infty$ 时 $\gamma(r)\to+\infty$ 的函数

$$\gamma:\ [0,\ +\infty)\mapsto[0,\ +\infty]$$

使得 $\|v-w\|\gamma(\|v-w\|)\leqslant(Av-Aw,\ v-w)\quad v,\ w\in X.$

特别注意，这种类型的映射 A 满足定理 6 推论指出的性质(s)，参看 §3 注 2. ▌

附注 14 在定理 6 中考虑的逼近解要求准确地满足原始的不等式. 这对应于映射 A 在逼近问题中保留不变的事实. 然而，亦可同时考虑 A 的逼近，关于这点，重温 §3 注 2. ▌

如我们开头所说，与本节有关的问题是逼近解 u_h 到原始问题解 u 的收敛性. 在这方面，上述定理 6 的意思是，对于包含在定理中所考虑的类型的映射 A 的不等式，u_h 至 u 的弱或强收敛性的证明化为在 §2 的意义下，逼近集 K_h 至原始问题的凸集 K 的收敛性的证明. 在某些情形，$K=\lim K_h$ 的证明可以用 §2 给出的一般收敛性结果得到，或在特殊情况中马上直接得到.

现在考虑一些例子：

(a) **Ritz-Galerkin 逼近** 上面指出第一种情况的一个例子是：一个具有非空内部的凸集的 Ritz-Garlerkin 类型的内逼近. 在此情形，在空间 X 给出一个原始的凸集 K，逼

近集 K_h 简单地选为 K 的有限维截面

$$K_h = K \cap X_h.$$

其中 X_h 是 X 的有穷维子空间的增大序列，且满足 $X = \bigcup_h X_h$ 的闭包.

因此我们由 §2(c) 知道，我们有 K_h 至 K 的收敛性，因而，在定理 6 的假设下，若 K 的内部是非空的，我们有 u_h 至 u 在定理 6 意义下的收敛性.

若 $\mathring{K}$ 是空的，则可用在 §2(a)指出的类型的条件进行验证.

(b) **Sobolev 空间的内逼近** 一个典型的(例如，有限元方法)一般内逼近格式，可如下描述.

K 是 X 的一个闭凸子集.

(V^h) 是一个有限维空间的序列.

对每个 h, L^h 是 V^h 的一个闭凸子集.

假设对每个 h, 存在一个内射映射

$$P_h: \quad V^h \mapsto X$$

及一个映射

$$r^h: \quad X \mapsto V^h$$

使得以下(i)及(ii)成立:

(i) $P_h L^h \subset K$ 对每个 h,

(ii) $\|v - P_h r^h v\| \to 0$ 对每个 $v \in K$.

在这些假设下，若

$$K_h = P_h L^h$$

显然有

$$K = \lim K_h \quad 在 X 中.$$

不同于例(a)，这个格式要求收敛条件 (ii) 在所处理的问题中必须直接核对，我们现在看这类逼近的一个经典例子，即 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$ 的内逼近. 对此，也和在下面小节(c)给

出的 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$ 外逼近的例子一样，可参看 J. Cea [1], J. P. Aubin [1-5], F. DiGaglielmo [1].

例 1　$H_0^1(\Omega)$ 的内逼近

这里 $X=H_0^1(\Omega)$，其中 Ω 是 R^n 的有界开子集，$H_0^1(\Omega)$ 是 Ω 上所有使得 $v\in L^2(\Omega)$ 且对每个 $i=1, \cdots, n$, v 的广义导数 v_{x_i} 也属于 $L^2(\Omega)$ 的实函数 $v(x)$ 的 Sobolev 空间，

$$x=(x_1, \cdots, x_n)\in R^n.$$

$H_0^1(\Omega)$ 是带有范数

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)}=\left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{i=1}^n\|v_{x_i}\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2}$$

的自反 Banach 空间.

给出一个离散参数

$$h=(h_1, \cdots, h_n), \quad h_i>0 \text{ 对每个 } i,$$

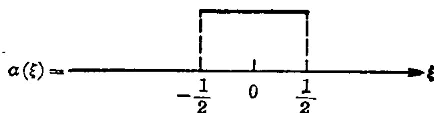
我们现在定义一个内射映射

$$P_h:\ V^h\mapsto X_h, \quad X_h \text{ 是 } X=H_0^1(\Omega) \text{ 的子空间},$$

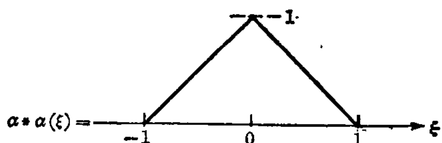
其中 V^h 是一个 n_h 维向量空间，n_h 依赖于 h 及给定的 Ω.

让我们考虑：

$\alpha(\xi)$ = 实区间 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 的特征函数



$\alpha*\alpha(\xi)$ = 一维"帐篷"函数



对于任意的多重指标 $q=(q_1, \cdots, q_i, \cdots, q_n), q_i \in N, \forall i$，令

$$\varphi_q^h(x)=\alpha*\alpha\left(\frac{x_1}{h_1}-q_1\right)\cdots\alpha*\alpha\left(\frac{x_i}{h_i}-q_i\right)\cdots\alpha*\alpha\left(\frac{x_n}{h_n}-q_n\right),$$

即是支集为中心点

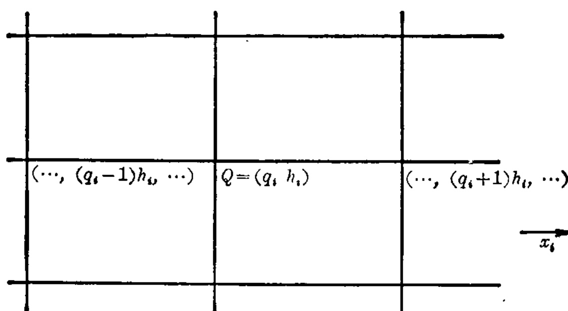
$$Q=(q_1h_1, \cdots, q_ih_i, \cdots, q_nh_n),$$

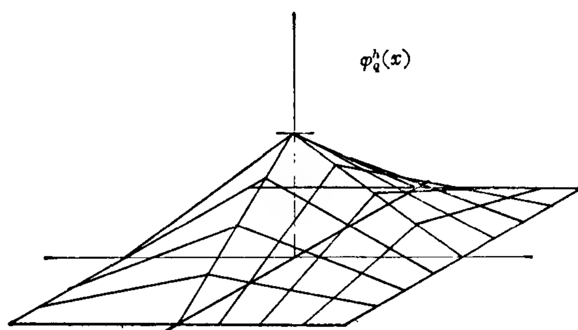
“棱长”是 $\quad 2h=(2h_1, \cdots, 2h_i, \cdots, 2h_n)$

的“n 维立方体”

$$\{X=(X_i): (q_i-1)h_i \leqslant X_i \leqslant (q_i+1)h_i, \ i=1, \cdots, n\}$$

的 n 维帐篷函数：





Q^h＝所有使得

$$\operatorname{supp} \varphi_q^h \subset \Omega$$

的多重指标 $q=(q_1, \cdots, q_n)$ 的集合，及

$$\Omega^h = \bigcup_{q \in Q^h} \operatorname{supp} \varphi_q^h$$

注意　　$\varphi_q^h(x) \in H_0^1(\Omega)$　对每个 $q \in Q^h$；

$V^h \equiv V^h(\Omega)$＝所有实向量

$$v^h = (v_q^h)_{q \in Q^h}$$

的空间；

映射　　P_h: $V^h = V^h(\Omega) \mapsto X = H_0^1(\Omega)$

由　　$P_h v^h \equiv v_h(x) = \sum_{q \in Q^h} v_q^h \varphi_q^h(x), \quad v^h = (v_q^h)_{q \in Q^h}$

给定，即

$$v_h(x) = \sum_{q \in Q^h} v_q^h \left[\alpha * \alpha\left(\frac{x_1}{h_1} - q_1\right) \cdots \alpha * \alpha\left(\frac{x_n}{h_n} - q_n\right)\right];$$

$X_h = P_h V^h(\Omega)$，由基函数

$$\varphi_q^h(x), \quad q \in Q^h$$

生成的 $X = H_0^1(\Omega)$ 的子空间.

因为 P_h 显然是内射映射，V^h 及 X_h 是同构的，且在许多叙述中它们确实是等同的；

映射　　r^h: $X = H_0^1(\Omega) \mapsto V^h = V^h(\Omega)$

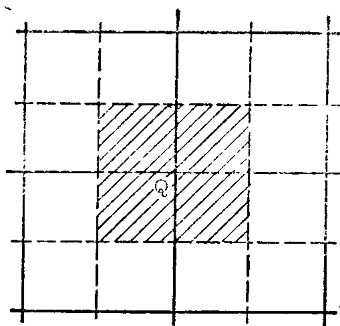
它把函数 $v(x)$ 与向量 $v^h = (v_q^h)_{q \in Q^h}$ 联系起来，后者第 q 个分量

$$v_q^h = \frac{1}{h_1 \cdots h_n} \int_{\left(q_1 - \frac{1}{2}\right)h_1}^{\left(q_1 + \frac{1}{2}\right)h_1} \cdots \int_{\left(q_n - \frac{1}{2}\right)h_n}^{\left(q_n + \frac{1}{2}\right)h_n} v(x) dx_1 \cdots dx_n$$

是 $v(x)$ 在区域

$$\left\{x = (x_i): \left(q_i - \frac{1}{2}\right) h_i \leqslant x_i \leqslant \left(q_i + \frac{1}{2}\right) h_i;\ i = 1, \cdots, n\right\}$$

的平均值.



主要的逼近结果可综述如下：

引理 3 对每个 $v\in H_0^1(\Omega)$, $P_h r^h v\in H_0^1(\Omega)$ 及

$$\|v-P_h r^h v\|_{H_0^1(\Omega)}\to 0 \quad 当\ |h|\to 0.$$

推论 1 若 $X=H_0^1(\Omega)$ 及 $X_h=P_h V^h(\Omega)$, 则

$$X=\lim X_h.$$

推论 2 若

$$K=\{v\in H_0^1(\Omega):\ v\geqslant 0\quad a.e.\ 在\ \Omega\ 内\}$$

及 $$K_h=P_h L^h,\ L^h=\{v^h\equiv(v_q^h)\in V^h(\Omega^h):\ v_q^h\geqslant 0\ \forall q\}$$

则 $$K=\lim K_h\quad 在\ H_0^1(\Omega)\ 内.$$

关于误差 $\|v-P_r r^h v\|$ 的估计，参看上面提到的文章.

(c) **Sobolev 空间的外逼近** 到目前为止所提及的例子都有共同的特性，即集合 K 由包含在 K 内的集合 K_h 逼近，它强调了我们使用内逼近这个词的根据.

然而，容易改写格式(b)为逼近集合 K_h 不要求包含在 K 内的更一般情况.

诚然，用条件

(ii) 若 $v_j\in P_{h_j}L^{h_j}$, 其中 $(L^{h_j})_j$ 是 $(L^h)_h$ 的一个子序列，而且 V_j 在 X 中弱收敛至 $v\in X$, 则 $v\in K$

代替条件(i)就足够了.

事实上，这个条件与上述条件(i)一齐等价于极限

$$K=\lim P_h L^h \quad 在\ X\ 中.$$

虽然不很合适，我们仍可以称这类逼近为一个外逼近.

如所周知，偏微分算子逼近的有限差分法可以放入刚才我们指出的外逼近的框架之中. 作为它的一个例子，让我们简略地描述 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$ 的外逼近.

例　$H_0^1(\Omega)$ 的外逼近

让我们考虑：

对每个 $i=1, \cdots, n$, 配备范数

$$\|v\|_{[H^1(\Omega)]_i}=(\|v\|^2_{L^2(\Omega)}+\|v_{x_i}\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}$$

的空间 $\quad [H^1(\Omega)]_i=\{v\in L^2(\Omega): v_{x_i}\in L^2(\Omega)\}$;

所有向量函数

$$\boldsymbol{v}(x)=(v_1(x), \cdots, v_n(x)),\ v_i(x)\in[H^1(\Omega)]_i \quad i=1,\cdots,n,$$

具有乘积拓扑的乘积空间

$$X=\prod_{i=1}^{n}[H^1(\Omega)]_i$$

包含在 X 的对角线的闭子空间

$$X_0=\{\boldsymbol{v}(x)=(v_i(x))_i:\ v_i=v\in H_0^1(\Omega),\ i=1, \cdots, n\}\ 内.$$

我们将把空间 $H_0^1(\Omega)$ 看成与 X_0 一样，即把函数 $v(x)\in H_0^1(\Omega)$ 看成与向量函数

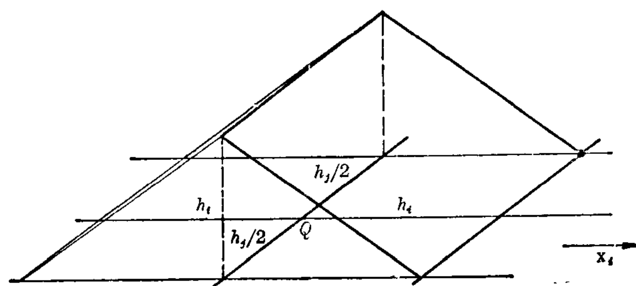
$$\boldsymbol{v}(x)=(v(x), \cdots, v(x)) \quad 在\ X_0\ 内$$

一样.

"在 i 方向光滑"的 n 维帐篷函数：

$$\varphi_q^{h,i}(x)=\alpha\left(\frac{x_1}{h_1}-q_1\right)\cdots\alpha*\alpha\left(\frac{x_i}{h_i}-q_i\right)\cdots\alpha\left(\frac{x_n}{h_n}-q_n\right),$$

$i=1, \cdots, n$, 其中 $q=(q_1, \cdots, q_n)$ 是多重指标，$\alpha(\xi)$ 是前面例子考虑的一维帐篷函数：



$\varphi_q^{h,i}(x)$ 的支集是中心在点 $Q=(q_1h_1, \cdots, q_nh_n)$，除 i 方向外所有方向棱长为 h_j，而在 i 方向棱长为 $2h_i$ 的 n 维“立方体”

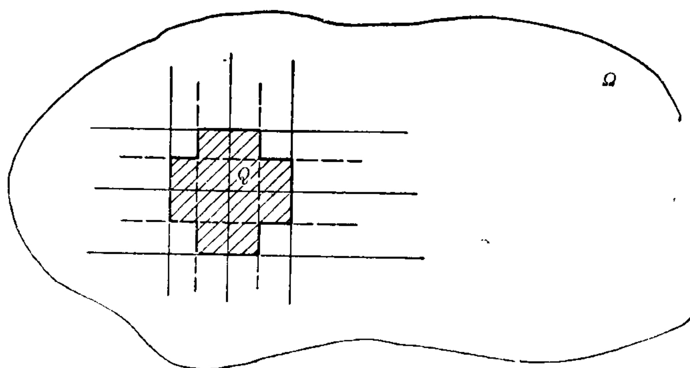
$$\text{supp}\ \varphi_q^{h,i}(x)=\Big\{x=(x_i)_i:\left(q_r-\frac{1}{2}\right)h_r\leqslant x_r\leqslant\left(q_r+\frac{1}{2}\right)h_r,$$

$$r=1,\cdots, i-1, i+1, \cdots, n, (q_i-1)h_i\leqslant x_i\leqslant(q_i+1)h_i\Big\}$$

Q_{est}^h＝所有使得中心在 $Q=(q_ih_i)$，在每个方向“臂长”为 $2h_i$ 的“十字区域”

$$\bigcup_{i=1}^n \text{supp}\ \varphi_q^{h,i}(x)$$

包含在 Ω 内的多重指标 $q=(q_1, \cdots, q_n)$ 的集合，



且 $$\Omega_{est}^{h}=\bigcup_{q\in Q_{est}^{h}}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\operatorname{supp}\varphi_{q}^{h,i}\right),$$

显然，对每个 $i=1, \cdots, n,$

$$\varphi_q^{h,i}(x)\in[H^1(\Omega)]_i,\quad \text{对所有 } q\in Q_{est}^h;$$

$V_{est}^h=V_{est}^h(\Omega)=$所有实向量

$$v^h=(v_q^h)_{q\in Q_{est}^h}$$

的空间；

映射

$$\boldsymbol{P}_h\equiv(P_{h,i})_i:\ V_{est}^h=V_{est}^h(\Omega)\mapsto X=\prod_i[H^1(\Omega)]_i$$

$$v^h\mapsto \boldsymbol{P}_h v^h\equiv(P_{h1}v^h,\ \cdots,\ P_{hn}v^h)$$

其中，对每个 $i=1, \cdots, n,$ 映射

$$P_{hi}:\ V_{est}^h\mapsto[H^1(\Omega)]_i$$

由 $$P_{hi}v^h=v_{hi}(x)=\sum_{q\in Q_{est}^h}v_q^h\varphi_q^{hi}(x),\ v^h=(v_q^h)_{q\in Q_{est}^h}$$

给出.

$X_h=\boldsymbol{P}_hV_{est}^h(\Omega)$ 是 $X=\prod_i[H^1(\Omega)]_i$ 的子空间，它由基向量函数

$$\boldsymbol{\varphi}_q^h(x)=(\varphi_q^{h_1}(x),\ \cdots,\ \varphi_q^{h_n}(x)),\quad q\in Q_{est}^h$$

生成.

显然，$\boldsymbol{P}_h$ 是 $V_{est}^h(\Omega)$ 至 X_h 上的一个同构，它将 $X=\prod_i[H^1(\Omega)]_i$ 的向量函数

$$\boldsymbol{v}_h(x)=\boldsymbol{P}_hv^h=(v_{h1}(x),\ \cdots,\ v_{hn}(x))$$

(其中 $v_{hi}(x)=P_{hi}v^h,\ i=1, \cdots, n$) 与 $V_{est}^h(\Omega)$ 的向量 v^h 相联系.

最后，我们仍以 r^h 记每个函数 $v(x)\in L^2(\Omega)$ 与 $V_{est}^h(\Omega)$ 的向量

$$v^h=(v_q^h)_{q\in Q_{est}^h}$$

相联系的映射，后者第 q 个分量由 $v(x)$ 在区域

$$\left\{x=(x_i)_i:\left(q_i-\frac{1}{2}\right)h_i\leqslant x_i\leqslant\left(q_i+\frac{1}{2}\right)h_i,\ i=1,\ \cdots,\ n\right\}$$

上的平均值给出.

引理 4 令 $v\in H_0^1(\Omega)$，对每个 $i=1,\ \cdots,\ n$，$P_{hi}r^h v\in [H^1(\Omega)]_i$ 及

$$\|v-P_{hi}r^h v\|_{[H^1(\Omega)]_i}\to 0 \quad 当\ |h|\to 0.$$

引理 5 令 $v^h=(v_q^h)_{q\in Q_{est}^h}$，且假设对每个 $i=1,\ \cdots,\ n$

$$v_{hi}(x)=P_{hi}v^h$$

当 $|\boldsymbol{h}|\to\boldsymbol{0}$ 时，在 $[\boldsymbol{H}^1(\boldsymbol{\Omega})]_i$ 中弱收敛于一个函数 w_i.

则有

$$w_i(x)\equiv v(x) \quad a.\ e.\ 对所有\ i=1,\ \cdots,\ n,$$

其中 $v(x)$ 属于 $H_0^1(\Omega)$. 再者，$\boldsymbol{v}_h(x)=\boldsymbol{P}_h v^h$ 当 $|h|\to 0$ 时在 $X=\prod\limits_i[H^1(\Omega)]_i$ 中弱收敛于 $\boldsymbol{v}(x)=(v(x),\ \cdots,\ v(x))$.

推论 1 令 $X_0\simeq H_0^1(\Omega)$，$\boldsymbol{X}_h$ 为由基向量函数 $\varphi_q^h(x)$，$q\in Q_q^h$ 张成的 $X=\prod\limits_i[H^1(\Omega)]_i$ 的子空间，则当 $|h|\to 0$，有

$$X_0=\lim X_h \quad 在\ X\ 内$$

推论 2 令 $K=\{v\in H_0^1(\Omega):\ v\geqslant 0\ a.\ e.\ 在\ \boldsymbol{\Omega}\ 内\}$ 为与 $\boldsymbol{X}$ 中锥 $\boldsymbol{K}$ 等同的集合，且

$$\boldsymbol{K}_h=\boldsymbol{P}_h L^h,\quad L^h=\{v^h=(v_q^h)_{q\in Q_{est}^h}:\ v_q^h\geqslant 0\ \forall q\}$$

则当 $|h|\to 0$，有

$$\boldsymbol{K}=\lim \boldsymbol{K}_h \quad 在\ X\ 内$$

(*d*) **投影方法** 到这里为止所讨论的逼近方法可以称为内射类型的：它们基于某些有限维空间 v^h 映入 X 的适当的内射映射 P_h，而 P_h 是使 v^h 的凸子集 L^h 映入 X 的逼近 K 的凸子集 K_h.

然而，一种概念上不同类型的逼近也是可能的，它基于 X 映到 X 的一个有限维子空间 X_h 上的某些投影映射 P_h: 在这情形，映射 P_h 把给定集合 K 映到 X_h 中的逼近 K_h 上.

这些方法最自然的装置包括一个 Hilbert 空间 X，一个 X 的有限维子空间 X_h 的增序列(其中 $\bigcup_h X_h$ 在 X 中稠密)，以及，对每个 h，X 映到 X_h 上的正交投影 P_h.

若 $\mathscr{A}$ 是一个 X 映到 X 内的映射，K 是 X 的有界闭凸子集，则问题

$$u \in K: \ (\mathscr{A}u | v-u) \geqslant 0 \quad \forall v \in K$$

可由问题序列

$$u_h \in K_h: \ (\mathscr{A}_h u_h | v_h - u_h) \geqslant 0 \quad \forall v_h \in K_h$$

逼近，其中

$$\mathscr{A}_h = P_h \mathscr{A} P_h$$

是 X_h 映入 X_h 的一个映射，且

$$K_h = P_h K$$

是 X_h 的(有界)闭凸子集(参看 §2(d')).

注意上述逼近问题是在子空间 X_h 内的. 然而它的解 u_h 与问题

$$u_h \in K_h: \ (\mathscr{A}u_h | v_h - u_h) \geqslant 0 \quad \forall v_h \in K_h$$

的解在空间 X 中是一样的. 事实上，我们有

$$(\mathscr{A}_h u | w) = (P_h \mathscr{A} P_h u | w) = (\mathscr{A} P_h u | P_h w)$$

因而 $\quad (\mathscr{A}_h u_h | w_h) = (\mathscr{A} u_h | w_h) \quad$ 对每个 $u_h, w_h \in X_h$.

所以，由于现在考虑到在 §2(e')所说明的收敛性结果，逼近解 u_h 的收敛性证明仍然依赖于定理 6. 对于这点的更详细的讨论，例如，可参考作者的文章[4]的命题 3.1.

在 Banach 空间中解包含非线性算子方程的投影方法被许多作者广泛地探索，这里指出 F. E. Browder[10][12]，F. E. Browder 及 W. V. Petryshyn[1] 及 R. I. Kachurrovskii

的评论文章[3]，在其中可找到这个课题的进一步参考文献．亦可参看 D. G. de Figuerido[1]．

附注 15 包含线性映射 A 的方程 $Au=f$ 的 Ritz-Galerkin 方法中，误差 $\|u-u_h\|$ 通常的估计是基于不等式

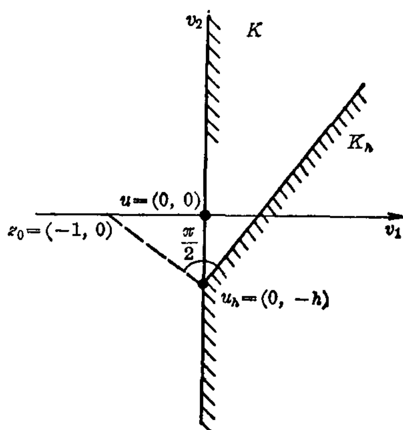
$$\|u-u_h\|\leqslant C\,\mathrm{dist}(u,\ X_h),$$

X_h 是 X 的子空间，逼近解 u_h 属于 X_h．然而，这个估计式对变分不等式一般是不对的，甚至关于凸锥的内逼近的情形也如此．

这可用 G. Strang 给出的下述例子来考察：$u=0$ 是在欧氏空间 E^2 的半平面 $v_1\geqslant 0$ 上使距离泛函

$$F(v)=\frac{1}{2}\|v-z_0\|^2,$$

$v=(v_1,\ v_2)\in E^2$，$z_0=(-1,0)$ 极小化的向量，而 $u_h=(0,\ -h)$ 是对一个给定的 $h>0$，使 $F(v)$ 在如图描述的凸锥 K_h 上极小化的向量．



这样，$\|u-u_h\|=h$，而对于小的 $h>0$，$\mathrm{dist}(u,\ K_h)\simeq h^2$．

§7 对偶变分不等式和互补系

众所周知，变分学和最优化理论中许多极小问题，可以有一个关于“对偶”形式的互补系．关于这个事实，我们在这里仅指出参考书，例如，A. M. Arthurs[1]，J. Stoer-Witzgal

[1], J. Cea[2], Robinson[1], Moreau[2], U. Dieter[1], [2].

对于变分不等式,也是这样,可以给出解的许多"对偶"特征,它们主要是基于分离定理或最小-最大定理,某些这种对偶方法的讨论,可以在上面所引的 J. L. Lions, R. Glowinski, R. Tremolières 中找到.

正如我们将在下面看到的那样,至少在原则上,总可以将空间 X 中任意给定的变分不等式——"原来"的不等式,与 X^* 中的一个变分不等式——"对偶"的不等式,按如下一种方式联系起来,即,X 中向量 u 是原来的不等式的解,当且仅当 X^* 中向量 $u^*=-Au$ 是与之相联系的对偶不等式的解.但是,在实践中,求对偶不等式的显式本身,常常可能是一个困难的问题.

我们将首先考虑凸锥上的变分不等式. 这时,我们想要的对偶格式,就变得特别简单,并且,原来的和对偶的不等式两者,利用所谓的(广义)互补系可以较对称地表示.

设 M 实际上是 X 映入 X^* 的任意映射,H 是 X 中顶点为 0 的一个凸锥,z 是变分不等式

(48′) $$z\in H:\ (Mz, w-z)\geqslant 0 \quad \forall w\in H,$$

的解.

则偶对 z、$z^*=-Mz$ 是问题

(48*) $$z\in H,\ z^*\in H^*:\ (z^*, z)=0$$

的解.

事实上,将 $w=z+v$ (v 是 H 的一个任意的向量)代入(48′),我们发现

$$(Mz, v)\geqslant 0 \quad \forall v\in H,$$

这就是说,$z^*\in H^*$. 此外,现在在(48′)中将向量 w 换成 0,

然后再换成 $2z$，我们发现，分别有

$$(Mz,\ -z)\geqslant 0 \quad 和 \quad (Mz,\ z)\geqslant 0,$$

因此，$(z^*,\ z)=0$。

反之，如果偶对 z、$z^*=-Mz$ 适合上面的(48*)，则对于每一个 $w\in H$，我们有

$$(Mz,\ w-z)=(-z^*,\ w-z)=(-z^*,\ w)\geqslant 0,$$

因为 $z^*\in H^*$.

因此，我们证明了下面的：

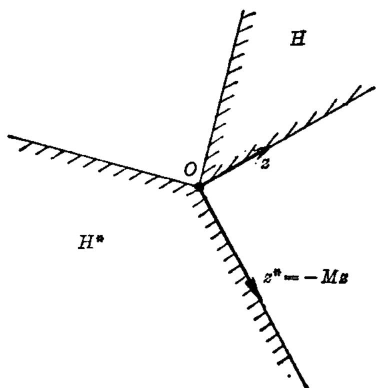
引理 6 **设 M 为 X 映入 X^* 的任意映射，H 为 X 中顶点为 0 一个凸锥．向量 z 是变分不等式**

$$z\in H:\ (Mz,\ w-z)\geqslant 0 \quad \forall w\in H$$

的解，当且仅当偶对 z、$z^*=-Mz$ 是问题

$$z\in H,\ z^*\in H^*:$$
$$(z^*,\ z)=0$$

的解．



现在我们假定映射 M 是 X 映到 X^* 上的1-1映射，并且我们定义映射

$$M':\ X^*\mapsto X$$

为

(49) $$M'w^*=-M^{-1}(-w^*) \quad w^*\in X^*.$$

应当指出，当 M 是线性时，$M'=M^{-1}$. 我们还假定 H 是顶点为 0 的闭凸锥．那么，如果我们将 H^* 在 X 中的配极锥记作 H^{**}，即

$$H^{**}=\{z\in X:\ (z,\ z^*)\leqslant 0 \ \ \forall z^*\in H^*\},$$

基于凸集的分离定理，可以简单地证明

$$H^{**}=H.$$

由于关系

$$z^*=-Mz.$$

显然等价于 $$z=-M'z^*,$$

对映射 M 和锥 H 应用一次引理 6, 然后对 M' 和 H^* 再应用一次引理 6, 我们得到下面的:

定理 7 设 M 是 X 映到 X^* 上的 1-1 映射, H 为 X 中顶点为 0 的一个闭凸锥. 如果 M' 是由 (49) 给出的 X^* 映到 X 上的映射, H^* 是 H 在 X^* 中的配极锥, 则下列三个问题是等价的:

(i) $z\in H$: $(Mz,\ w-z)\geqslant 0 \quad \forall w\in H$

(ii) $z^*\in H^*$: $(M'z^*,\ w^*-z^*)\geqslant 0 \quad \forall w^*\in H^*$

(iii) $z\in H,\ z^*\in H^*$: $(z^*,\ z)=0$, 假定 z 和 z^* 适合

$$z^*=-Mz,\quad 即:\quad z=-M'z^*.$$

附注 16 如果 $M=DF$, F 是 X 上的一个凸泛函, 则 $M'z^*=-DF^*(-z^*)$, $z^*\in X^*$, 其中 F^* 是 F 的共轭泛函(见§2). 这时, 定理 7 的对偶问题(i)和(ii)分别刻划极小值问题:

(i) 在 H 上, z 极小化 $F(w)$,

(ii) 在 $-H^*$ 上, z^* 极小化 $F^*(w^*)$.

上述的问题 (i) 和 (ii), 在例如 Fenchel 对偶性定理的意义下是共轭的, 参考 R. T. Rockafeller[2]. ∎

附注 17 设 v_0 是 X 的一个给定的向量, A 是 X 映到 X^* 上的一个给定的 1-1 映射, A' 象(49)中那样定义. 如果我们应用定理 7 于映射

$$Mz=A(z+v_0),\quad z\in X,$$

那么, 我们发现下列的问题是等价的:

(i) $u\in v_0+H$: $(Au,\ v-u)\geqslant 0 \quad \forall v\in v_0+H$

(ii) $u^* \in H^*$: $(A'u^* + v_0,\ v^* - u^*) \geqslant 0 \quad \forall v^* \in H^*$

(iii) $u - v_0 \in H,\ u^* \in H^*$: $(u^*,\ u - v_0) = 0$, 假定

$$u^* = -Au, \quad \text{即:} \quad u = -A'u^*.$$

其实只要做变量变换 $z = u - v_0$ 就行了. ∎

当 $X = \mathbb{R}^n \simeq X^*$,并且 $H \simeq H^*$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的非负的卦限时,象上述(iii)这样的问题,在文献中被认为是**互补系**(complementarity systems):当 M 是 $\mathbb{R}^n$ 映入自身的仿射映射时,为**线性的互补系**,在一般情形下,为**非线性的互补系**. 它们出现在最优化和对策论的许多问题中,以及在几何或物理的应用中,并且曾被许多作者研究过,见 R. Cottle-I. Dantzig[1][2], R. Cottle[1], C. E. Lemke[1], S. Karamardian[1],在那里可以找到关于这些系及它们的应用的进一步的参考文献.

在这些文章中,给出了线性和非线性互补系的数值解的许多算法.

这些算法,主要是基于适当的主元技巧,这样,也可以用来求解凸锥上的离散变分不等式. 在下面的 §8 中,我们将看一个例子.

反过来,为了得到较一般的存在性结果,将互补系归结到变分不等式,从而归结到不动点问题,可能是方便的. 此外,从算法的观点来说,这种归结也是富有成效的. 因为这使得有可能利用迭代法求解,关于在有限维空间中变分不等式与互补系之间的关系,更详细的讨论,我们指出参考上面引过的 Karamardian, I. Dolcetta[1], J. Moré[1].

与凸规划相关的变分不等式,也被 O. G. Mancino-G. Stampacchia[1] 研究过(从计算观点的研究).

上面考虑的凸锥上变分不等式的对偶性,是下述类型变分不等式(50)的一般对偶格式的一个特殊情形:

(50) $u\in X$: $(Au, v-u)\geqslant F(u)-F(v)$, $\forall v\in X$,

其中，F 是赋范空间 X 上的下半连续凸泛函，其值在 $(-\infty, +\infty]$ 中.

在这种情形，对偶的变分不等式可写作:

(51) $u^*\in X^*$: $(A'u^*, v^*-u^*)\geqslant F^*(u^*)-F^*(v^*)$, $v^*\in X^*$,

其中，A' 象(49)中那样定义，F^* 是 F 的 Young-Fenchel 共轭，见 § 2.

可以证明：一向量 v 是(50)的解，当且仅当向量

(52) $$u^*=-Au \quad (\text{即}, u=-A'u^*)$$

是(51)的解. 此外，解 u 和 u^* 同时由 Young-Fenchel 恒等式所刻划:

(53) $$F(u)+F^*(u^*)=(u^*, u),$$

其中，u 和 u^* 互相关联如上述(52)中那样.

取 F 为 X 中凸锥 H 的指示函数 δ_H(见 § 2)，从而 $F^*=(\delta_H)^*=\delta_{H^*}$ 是 H 在 X^* 中配极锥 H^* 的指示函数，这便得到定理 7 的特殊情形.

[附注 17 的对偶问题，换成由 $F=\delta_{v_0+H}$，从而 $F^*(w^*)=\delta_{H^*}(w^*)+(w^*, v_0)$ 所给定]. 更详细的讨论可参考 U. Mosco [7].

附注 18 当 A 是一个凸泛函 G 的微分时，则对偶问题(50)(51)，在 Fenchel 对偶性定理意义下，刻划一对对偶的极值问题，见 R. T. Rokafeller[2].

当 X 是一个 Hilbert 空间时，$X^*\simeq X$，$A=X$ 的恒同映射，则上述的问题(50)(51)和等价系(53)，与由 J. J. Moreau [2] 引入的所谓近似映射(Proximity mapping)相关联.

这种类型的对偶格式，应用于证明解的正则性，曾被 H. Brezis[4] 给出. ▌

附注 19 对偶不等式(51)的显式形式，需要知道逆映射 A^{-1} 和共轭泛函 F^*. 特别是，即使对于"简单的" F, F^* 的计算可能是一个困难问题. 但是，这节中所描述的对偶格式，可以按具体情况修正，在完成对偶形式之前，在原问题中做一种"变量变换". 在某些情形下，这导致比较更可行的 A 的"部分"反演和 F 的对偶化. 对偶极值问题，事实上曾被 R. Teman [1] 根据 R. T. Rockafeller 给出的 Fenchel 对偶性定理的广义形式，按这些方式研究过. 一个类似的得到对偶变分不等式的方法，见 M. Matzeu[1]. ∎

在下面一节中，我们将应用上述的对偶格式于第二章 §1 提出的"障碍问题"，并且我们将借助它，给出解的数值逼近的一个方法.

就这方面来说，我们还要指出，求得对偶的不同的方法(主要是基于最小-最大技巧)，也曾被 J. Cea-R. Glowinski [1], [2], J. Cea-R. Glowinski-Nedelec[1], M. Nedlec[1], J. F. Bourgat[1] 应用于第二章 §1 那些问题的数值解. 也见 J. Cea[2].

§8 例

我们考虑第二章 §1(例 3)的障碍问题:

$$u\in H_0^1(\Omega),\ u\geqslant\psi\quad 在\ \Omega\ 中(几乎处处)$$

$$a(u,\ v-u)\geqslant 0\quad \forall v\in H_0^1(\Omega),\ v\geqslant\psi\ 在\ \Omega\ 中(几乎处处),$$

其中, $a(u, v)$ 是 Dirichlet 型

$$a(u,\ v)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}u_{x_i}v_{x_i}\,dx,\quad \Omega\subseteq R^n$$

且 ψ 是 $H_0^1(\Omega)$ 中的一个给定的函数.

我们处在上节附注中所述的这样的情形：

$$X=H_0^1(\Omega),$$
$$A=-\Delta_2:\ H_0^1(\Omega)\mapsto H^{-1}(\Omega),$$
$$H=\{w\in H_0^1(\Omega):\ w\geqslant 0\ \text{在}\ \Omega\ \text{中(几乎处处)}\},$$
$$H^*=\{\tau\in H^{-1}(\Omega):\ \tau\ \text{测度}\leqslant 0\}.$$

此外，

$A'=A^{-1}=G:\ H^{-1}(\Omega)\mapsto H_0^1(\Omega)$ 是 Ω 中 Dirichlet 问题的 Green 算子：对于 $H^{-1}(\Omega)$ 中任意的测度 τ，位势

$$v(x)=G\tau(x)$$

由下式给出：
$$v(x)=\int_\Omega g(x,\ y)d\tau(y)$$

其中，$g(x,\ y)$ 是关于 Ω 中 Dirichlet 问题的 Green 函数。

原来的变分不等式现在是

(50) $\quad u\in\psi+H:\ (-\Delta_2 u,\ v-u)\geqslant 0\quad \forall v\in\psi+H$

而对偶的不等式现在是

(51) $\quad \mu\in H^*:\ (G\mu+\psi,\ \tau-\mu)\geqslant 0\quad \forall\tau\in H^*$

这两个不等式都等价于互补系（见上节附注 17）

(52) $\quad z=u-\psi\in H,\ \mu\in H^*:\ (\mu,\ z)=0$

其中：

(53) $\quad \mu=\Delta_2 u,\quad$ 即 $\quad u=-G\mu.$

问题 (50) 或等价的直接极小问题的逼近解，曾被许多作者研究过，见 R. Glowinski[2], M. Goursat[1], Sibony[2], Marzulli[1], G. Stampacchia[5], V. Comincioli–L. Guerra 和 G. Volpi[1], J. J. Moreau[7], J. F. Durand[1].

我们将在下面概述 A. Fusciadi 等 [1] 提出的方法. 互补系 (52) 被有限维互补系的一个序列所逼近，没有任何正则性假定，这给出了函数 u 和测度 $\mu=\Delta u$（分别为 (50) 和 (51)

的解)的直接同时逼近.

这个离散化是这样得到的,利用被给定的 Ω 的坐标线剖分的 $(n-1)$ 维网线所支承的单位质量,实现测度 H^* 的锥的一个内逼近.

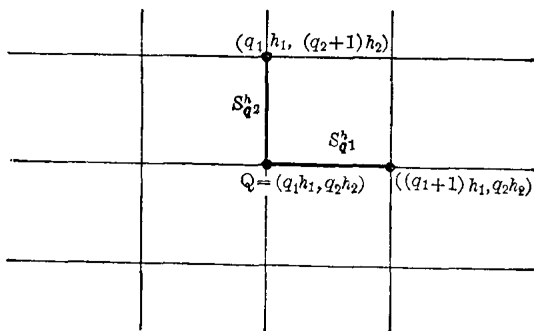
现在我们来描述这个逼近,为简单起见,取 $n=2$.

设我们考虑如 §6 例 1 中给出的那样一个 $\mathbb{R}^2$ 的坐标剖分,$h=(h_1, h_2)$ 为离散化参数,$Q=(q_1h_1, q_2h_2)$、$q=(q_1, q_2)\in Z^2$ 为剖分的结点.

对于每一个 $q=(q_1, q_2)\in Z^2$,我们将剖分的以 Q 为左端点和下端点的一维 $(1=n-1)$ 网线,分别记作 $S^h_{q^1}$ 和 $S^h_{q^2}$,即

$$S^h_{q^1}=\{x=(x_1,\ q_2h_2):\ q_1h_1\leqslant x_1\leqslant (q_1+1)h_1\}$$

$$S^h_{q^2}=\{x=(q_1h_1,\ x_2):\ q_2h_2\leqslant x_2\leqslant (q_2+1)h_2\}$$



设我们现在考虑泛函 $\sigma^h_{q^1}$ 和 $\sigma^h_{q^2}$,它们分别与每个 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 在 $S^h_{q^1}$ 和 $S^h_{q^2}$ 上的平均值相对应.

$$\sigma^h_{q^1}(\varphi)=\frac{1}{|S^h_{q^1}|}\int_{S^h_{q^1}}\varphi\, dx_1=\frac{1}{h_1}\int_{q_1h_1}^{(q_1+1)h_1}\varphi(x_1,\ q_2h_2)\, dx_1,$$

$$\sigma^h_{q^2}(\varphi)=\frac{1}{|S^h_{q^2}|}\int_{S^h_{q^2}}\varphi\, dx_2=\frac{1}{h_2}\int_{q_2h_2}^{(q_2+1)h_2}\varphi(q_1h_1,\ x_2)\, dx_2.$$

容易证明,对于每一个使得 $S^h_{q^1}$ 和 $S^h_{q^2}$ 包含在 Ω 中的 q 来

说，$\sigma_{q^1}^h$ 和 $\sigma_{q^2}^h$ 适合估计式：

$$|\sigma_{q^1}^h(\varphi)|\leqslant\left(\frac{\operatorname{diam}\Omega}{h_i}\right)^{1/2}\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

我们将所有使 $S_{q^1}^h$ 和 $S_{q^2}^h$ 包含在 Ω 中的 q 的集合，记作 Q^h.

[事实上，我们有：对于每一个 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\left|\int_{x_1'}^{x_1''}\varphi(x_1,\ \bar{x}_2)dx_1\right|\leqslant|x_1''-x_1'|^{1/2}\left(\int_{x_1'}^{x_1''}|\varphi(x_1,\ \bar{x}_2)|^2dx_1\right)^{1/2},$$

我们可以求得 x_2^0，使得

$$\varphi(x_1,\ \bar{x}_2)=\int_{x_2^0}^{\bar{x}_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_1,\ x_2)\,dx_2,$$

因此，

$$|\varphi(x_1,\ \bar{x}_2)|^2\leqslant|x_2-x_2^0|\int_{x_2^0}^{\bar{x}_2}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_1,\ x_2)\right|^2dx_2$$

$$\leqslant(\operatorname{diam}\Omega)\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_1,\ x_2)\right|^2dx_2$$

而这时

$$\int_{x_1'}^{x_1''}|\varphi(x_1,\ x_2)|^2dx_1\leqslant(\operatorname{diam}\Omega)\int_\Omega\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_1,\ x_2)\right|^2dx_1dx_2$$

因此，

$$\frac{1}{|x''-x'|}\left|\int_{x_1'}^{x_1''}\varphi(x_1,\ \bar{x}_2)\,dx_1\right|\leqslant\left(\frac{\operatorname{diam}\Omega}{|x_1''-x_1'|}\right)^{1/2}\|\varphi\|_{H_0^1}.\ \blacksquare$$

那么，$\sigma_q^{h_1}$ 和 $\sigma_{q^2}^h$，$q\in Q^h$，都是 $H_0^1(\Omega)$ 的对偶 $H^{-1}(\Omega)$ 的元素，并且，由于它们显然是非负的(即：假定 $\varphi\geqslant0$ 时，$\sigma_i^h(\varphi)\geqslant0$，$i=1,\ 2$)，我们可以得到结论，$\sigma_q^{h_1}$ 和 $\sigma_{q^2}^h$ 是属于 $H^{-1}(\Omega)$ 的非负测度.

现在我们用 H_h 来表示顶点在0、由非正测度 $-\sigma_{q^i}^h$，$q\in Q^h$，$i=1,\ 2$，所生成的锥：

$$H_h^*=\{\tau\in H^{-1}(\Omega):\ \tau=\sum_{\substack{q\in Q^h\\ i=1,2}}\tau_{q^i}^h(-\sigma_{q^i}^h),\ \tau_{q^i}^h\geqslant0\quad\forall q^i\},$$

显然，$\qquad H_h^*\subseteq H^*$ 对于每一个 h,

让我们回忆一下，其中，H^* 是 $H^{-1}(\Omega)$ 中所有非正测度的锥.

在下面引理的意义下，有限维锥 H_h^* 逼近锥 H^*:

引理 $H^*=\lim H_h^*$（在 $H^{-1}(\Omega)$ 中）.

从 § 2 定理 1 的推论来看，刚才所述的收敛性，等价于配极锥的收敛性：H^* 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的配极锥，是我们由之出发的 $H_0^1(\Omega)$ 中所有非负函数构成的锥 H，而 H_h^* 的配极锥 H_h，是所有其在每一 $S_{qi}^h(q\in Q^h,\ i=1,\ 2)$ 上的迹有非负平均值的函数 $v\in H_0^1(\Omega)$ 构成的锥:

$$H=\{v\in H_0^1(\Omega):\ v\geqslant 0 \text{ 在 } \Omega \text{ 中几乎处处}\},$$

$$H_h=\{v\in H_0^1(\Omega):\ (\sigma_{qi}^h,\ v)\geqslant 0,\ \forall q\in Q^h,\ i=1,\ 2\}.$$

现在，不难证明:

$$\text{当 } |h|\to 0 \text{ 时，}\quad \lim H_h=\bigcap_h H_h=H.$$

这可参考上面所引的 A. Fusciardi 等提出的方法.

这样，我们可以应用在 § 5 和 § 6 中所描述的逼近格式.

逼近问题 (51) 的有限维问题，可由将 H^* 换成 H_h^* 而得到（我们取 $\psi_h=\psi$，对于所有 h，并且，我们剩下 G 仍不变）:

(54) $\quad \mu_h\in H_h^*:\ (G\mu_h+\psi,\ \tau_h-\mu_h)\geqslant 0\quad \forall\tau_h\in H_h^*,$

它等价于互补系:

(55) $\quad z_h\in H_h,\ \mu_h\in H_h^*:\ (\mu_h,\ z_h)=0,$

其中: $\quad z_h=u_h-\psi,\ u_h=-G\mu_h.$

[应当指出，锥 H_h^* 是有限维的，而其配极锥 H_h 就不是这样的. 但是，z_h 属于有限维锥 $-G(H_h)-\psi$，这样，上述互补系本质上是有限维的.]

现在，我们写出以生成 H_h^* 的基 $\{-\sigma_{qi}^h\}$ 来表示的逼近测度 μ_h:

$$\mu_h=\sum_{\substack{q\in Q^h\\ i=1,2}}\mu_{qi}^h(-\sigma_{qi}^h),\quad \mu_{qi}^h\geqslant 0,$$

类似地，如果我们记

$$\tau_h=\sum_{\substack{q\in Q^h\\ i=1,2}}\tau_{qi}^h(-\sigma_{qi}^h)\quad \tau_{qi}^h\geqslant 0,$$

则相应于 (54) 的离散变分不等式，按照我们在 § 1 中看到过的那样，由下式给出：

$$(56)\quad \begin{cases}\mu^h\equiv(\mu_{qi}^h)_{\substack{q\in Q^h\\ i=1,2}}\geqslant 0\\ \sum\limits_{\substack{q,r\in Q^h\\ i,j=1,2}}(G_{qi,rj}^h\mu_{qi}^h-\psi_{qi}^h)(\tau_{rj}^h-\mu_{rj}^h)\geqslant 0\\ \forall\tau^h=(\tau_{rj}^h)_{\substack{P\in Q^h\\ j=1,2}}\geqslant 0\end{cases}$$

[将一个 $\mathbb{R}^N$ 的向量写成非负的，我们指的是它的一切分量是非负的].

其中，对于每一 $q\in Q^h$，$i=1, 2$，

$\psi_{qi}^h=(\sigma_{qi}^h, \psi)=\psi$ 在 S_{qi}^h 上的平均值，

$G_{qi,rj}^h=(\sigma_{qi}^h, G\sigma_{rj}^h)=\Omega$ 中位势在 S_{qi}^h 上的平均值，

由网线 S_{rj}^h 产生的测度 σ_{rj}^h 在 Ω 中的位势在 S_{qi}^h 上的平均值

$$(59)\qquad g_{rj}^h(x)=G\sigma_{rj}^h(x)=\frac{1}{|S_{rj}^h|}\int_{S_{rj}^h}g(x, y)dy_j.$$

[应当指出

$$G_{qi,rj}^h=G_{rj,qi}^g\quad q, r\in Q^h, i, j=1, 2.$$

因为 Green 算子 G 的对称性.]

例如，如果 $i=1$，$j=2$，矩阵元素 $G_{qi,rj}^h$ 由下式给出

$$G_{q_1r_2}^h=\frac{1}{h_1h_2}\int_{q_1h_1}^{(q_1+1)h_1}\int_{q_2h_2}^{(q_2+1)h_2}g(x_1, q_2h_2; r_1h_1, y_2)dx_1dy_2$$

离散问题(56)就等价于离散互补系

$$(58)\quad \begin{cases}\mu_{qi}^h\geqslant 0,\ z_{qi}^h\geqslant 0,\ \mu_{qi}^hz_{qi}^h=0,\ q\in Q^h,\ i=1, 2,\\ z_{qi}^h=\sum\limits_{\substack{r\in Q^h\\ j=1,2}}G_{qi,rj}^h\mu_{rj}^h-\psi_{qi}^h\end{cases}$$

它可以利用例如主元技巧而解出(见 F. Scarpini, A. Valdinoci [1]).

一旦这互补系被解出,我们可以写逼近测度

$$\mu_h=\sum_{\substack{q\in Q^h\\ i=1,2}}\mu_{qi}^h(-\sigma_{qi}^h)$$

和逼近函数
$$u_h(x)=\sum_{\substack{q\in Q^h\\ i=1,2}}\mu_{qi}^h g_{qi}^h(x)$$

由§6的收敛性结果,我们知道,当 $|h|\to 0$ 时, $u_h(x)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中强收敛于问题(51)的解 $u(x)$, 而测度 μ_h 在对偶空间 $H^{-1}(\Omega)$ 中强收敛于(52)的解 μ.

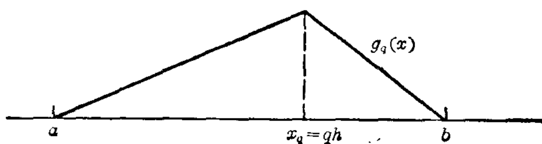
还让我们指明,由求解互补系(58)得到的系数 $z_{qi}^h+\psi_{qi}^h$, 对逼近中所用的每个一维网线上解 $u(x)$ 的平均值,产生一个直接逼近. 关于这一点的详细讨论,我们可参考 A. Fusciardi 等文.

[应当指出,对于任意函数 $u\in H_0^1(\Omega)$ $(n=2)$, 这个平均值是确定的,而 $u(x)$ 的逐点值是不定的,除非已知解 $u(x)$ 具有某种正则性. 而这种正则性是依赖于障碍 ψ 的正则性.]

附注 20 在一个区间 (a, b) 中,一维障碍问题的逼近是特别简单的. 这时,基测度 σ_q^h 可以取作在 R 的剖分结点 $x_q=qh$ 上的单位质量 δ_q. 逼近测度是这种 Dirac 测度的有限组合:

$$\mu_h=-\sum_q \mu_q^h\delta_q,\quad \mu_q^h\geqslant 0,$$

并且,由于在 (a, b) 中位势 $g(x)=G\delta_q(x)$ 是"三角形"函数,



那么，逼近函数

$$u_h(x)=\sum_q \mu_q^h g_q(x)$$

是(a, b)中的逐段线性函数. 互补系的解在这情形特别简单，见 F. Scarpini, A. Valdinoci[1]. ∎

附注 21 这节中所描述的逼近方法，要求知道Ω中 Dirichlet 问题的 Green 函数，但是，将上述对偶方法与 Laplace 算子的有限差分型逼近结合起来，也是可能的(将逐点值换成适当的平均值). 代替上面所述的内逼近，这要求$H^{-1}(\Omega)$中测度的外逼近，这可参考 U. Mosco–F. Scarpini [1].

参考文献

B. D. ANNIN:

[1] Existence and uniqueness of the solution of the elastic-plastic torsion problem for a cylindrical bar of oval cross-section, Prikl. Mat. Meh. **29** (1965).

A. M. ARTHURS,

[1] Complementary variational principles, Clarendon Press Oxford, 1970.

E. ASPLUND,

[1] Positivity of duality mappings, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 200～203.

J. P. AUBIN,

[1] Approximation of variational inequalities, in "Functional Analysis and Optimization" (E. R. Caianiello Ed.), Acad. Press 1966, 7～14.

[2] Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 12 (1967), 1～139.

[3] Behavior of the error of the approximate solutions of boundary value problems for linear elliptic operators by Galerkin's and finite difference methods, Annali Scuola Norm. Sup. **21** (1967), 599～637.

[4] Evaluation des erreurs de troncature des approximations des espaces de Sobolev, J. Math. Anal. Appli. **21** (1968), 356～368.

[5] Approximation des problémes aux limites non homogènes pour des opérateurs non lineaires, J. Math. Anal. Appl. **30** (1970), 510～521.

C. BAIOCCHI,

[1] Su un problema di frontiera libera Connesso a questioni di idraulica, to appear in Annali Mat. Pura Appl.

A. BEURLING and A. E. LIVINGSTONE,

[1] A thoorem on duality mappings in Banach spaces, Ark. Mat. 4. (1962), 405∼411.

L. Boccardo,

[1] Alcuni problemi al contorne con vincoli unilaterali dipendenti da un parametro, to appear.

J. F. Bourgat,

[1] Analyse numèrique du problème de la torsion elasto-plastique, Thèse, I. R. I. A. Paris, 1971.

H. Brezis,

[1] Une genèralisation des opèrateurs monotones, Inèquations d'évolution abstraites, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 264(1967), 683∼686 and 732∼735.

[2] Sur certains problèmes non-linèaires, Séminaire Choquet n. 18 (1966∼67), 1∼18.

[3] Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier **18**(1968), 115∼175.

[4] Problemes unilateraux, to appear.

H. Brezis and M. Sibony,

[1] Mèthodes d'approximation et d'iteration pour les opérateurs monotones, Arch. Rat. Mech. Anal. **28**(1969), 59∼82.

[2] Equivalence de deux inéquations variationnelles et applications, Arch. Rat. Mech. Anal., to appear.

H. Brezis and G. Stampacchia,

[1] Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques, Bull. Soc. Math. France **96** (1968), 153∼180.

F. E. Browder,

[1] Nonlinear elliptic boundary value problems, Bull. Amer. Math. Soc. **69**(1963), 862∼874.

[2] Nonlinear elliptic boundary value problems, II, Trans. Amer. Math. Soc. **117**(1965), 530∼550.

[3] Continuity properties of monotone nonlinear operators in Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **70**(1964), 551∼553.

[4] On a theorem of Beurling and Livingstone, Canad. J. Math. **17** (1965), 367∼372.

[5] Nonlinear monotone operators and convex in Banach spaces,

Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 780～785.

[6] Existence and uniqueness theorems for solutions of nonlinear boundary value problems, Proc. Amer. Math. Soc. Symp. Appl. Math. XVII (1965), 24～49.

[7] Problèmes non-linéaires, Les Presses de l'Univ. de Montréal, 1966, 1～48.

[8] Existence and approximation of Solutions of nonlinear variational inequalities, proc. Natl. Acad. Sci. U. S. **56** (1966), 1080～1086.

[9] On the unification of the calculus of variations and the theory of monotone nonlinear operators in Banach spaces. Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. **56**, 419～426.

[10] Non-linear accretive operators in Banach Spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 470～476.

[11] A new generalization of the Schauder fixed point theorem, Math. Annalen **174** (1967), 285～290.

[12] Approximation-solvability of nonlinear functional equations in normed linear spaces, Arch. Rat. Mech. Anal. **26** (1967), 33～42.

[13] Non-expensive nonlinear operators in a Banach space, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **54** (1965), 1041～1044.

[14] Non-linear variational inequalities and maximal monotone mappings in Banach spaces, Math. Annalen **175** (1968), 89～113.

[15] Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach Spaces, Proc. Amer. Math. Symp. Nonlinear Functional Analysis, Chicago, 1968.

F. E. Browder and W. V. Petryshyn,

[1] The solution by iteration of non-linear functional equations in Banach spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966). 571～575.

[2] Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space. J. Math. Anal. Appl. **20** (1967). 197～228.

J. Cea,

[1] Approximation variationnelle des problèmes aux limites. Ann. Inst. Fourier **14** (1964). 345～444.

[2] Optimisation, thèorie et algorithmes, Dunodéd, Paris. 1971.

J. Cea and R. Glowinski,

[1] Minimisation des fonctiouuelles non differentiables, to appear.

[2] Méthodes numériques pour l'écoulement laminaire d'un fluide rigide viscoplastique, incompressible, to appear.

J. CEA, R. GLOWINSKI and J. L. NEDELEC,

[1] Mèthedes numèriques pour la torsion élasto-Plastique d'une baree cylindrique, to appear.

V. COMINCIOLI, L. GUERRA and G. VOLPI,

[1] Analisi numerica di un problema di frontiera libera connesso col moto di un fluido attraver so un mezzo poroso, pubbl. n. 17 del Lab. Anal. Numer Pavia, 1971.

R. W. COTTLE,

[1] Nonlinear Programs with positively bounded Jacobians, SIAM J. Appl. Math. 14(1966), 147~157.

R. W. COTTLE, and G. B. DANTZIG,

[1] Positive (semi-) definte programming Symp. Math. progr. H. W. Kuhn Ed. Princeton 1970.

[2] Complementary pivot theory of mathe matical Programming. in Linear Algebra and its Applications Vol. I. (1968), 103~125.

J. P. DIAS and M. SIBONY,

[1] Methodes d'approximation pour certains problèms non linéaires non homogenes. to appear.

U. DIETER,

[1] Optimierung soufgaben in topologischen Vaktorräumen I: Dualitäts theorie, Z. Wahrscheinlichkeitheorie verw. Geb. 5 (1966), 89~117.

[2] Dual extremal problems in linear spaces with examples and applications in game theory and statistics. Proc. NATO Adv. Study Inst.on Theory and Appl. of Monotone Operators. Venezie, 1968, Oderisi Ed., 1969, 1~9.

F. DI GUGLIELMO,

[1] Construction d'approximations des espaces de Sobolev sur des reseaux en simplexes, Calcolo 6 (1969), 279~331.

I. DOLCETTA,

[1] Sistemi di complementaritá e disuguaglianze variazionali, Tesi, Università di Roma, 1972.

J. F. DURAND,

[1] Résolution numérique de problémes aux limites sousharmonique, Thèse á l'univ. de Montpellier, 1968～69.

C. DUVAUT and J. L. LIONS,

[1] Méchanique et inequations, Dunod. ed., Paris. 1971.

D. G. de FIGUERIDO

[1] Topics in non-linear functional analysis, Lecture Series N. 48, University of Maryland, 1967.

A. FUSCIARDI, U. MOSCO, F. SCARPINI and SCHIAFFINO,

[1] A dual method for the numerical solution of some variational inequalities, to appear in J. Math. Anal. Appl. 40(1972).

E. GIUSTI,

[1] Superfici minime cartesiane con ostacoli discontinui, Arch. Rat. Mech. Anal. **40**(1971).

R. GLOWINSKI,

[1] Methodes numériques pour l'éconlement. stationaire d'un fluide rigide visco-plastique incompressible, to appear.

[2] La methode de relaxation. Applications à la minimisation avec et sans constraintes de fonctionnelles convexes. Quaderni dei Rendiconti, Ist. Mat. Univ. Roma. 1971.

[3] Mèthodes numeriques pour la torsion elasto plastique d'une barre cylindrique. formulation Variationnelle, Colloq. Anal. Numer Supper Besses. 1970.

R. GLOWINSKI, J. L. LIONS and R. TREMOLIERES,

[1] Méthodes numériques de resolution des problémes d'inèquations variationnelles en mecanique et en physique, Dunod Ed, paris, to appear.

M. COURSAT,

[1] Analysc numérique de problémes d'elasto-plasticité et de visco-plasticité, Thése, I. R. I. A., Paris, 1971.

P. H. HARTMAN and G. STAMPACCHIA,

[1] On some nonlinear elliptic differential functional equations Acta Math. **115**(1966), 271～310.

A. IOFFE and V. TIKHOMIROV,

[1] Duality of convex functions and extremum problems, *Uspekhi* Mat. Nauk. 22, 6(1966), 51～116; Russian Math. Surveys **23**, 6

(1968), 53～124.

J. L. Joly,

[1] Une famille de topologies de convergences Sur l'ensemble des fonctionnelles convexes Thèse à la Faculté des Sciences de Grenoble 1970.

R. I. KACHUROVSKII,

[1] On monotone operators and convex functionals. Uspehi Mat. Nauk. **15**, 94 (1960), 213～215.

[2] Monotone non-linear operators in Banach Spaces, Dokl. Akad. Nauk, SSSR **163** (1965), 559～562.

[3] Nonlinear monotone operators in Banach spaces, Uspehi Mat. Nauk, **23** (1968) 121～168. Russian Math. Surveys **23**, 2 (1968), 117～165.

S. KANIEL,

[1] Construction of a fixed-point for contractions in Banach space, Israel J. Math., **9** (1971), 535～540.

S. KARAMARDIAN,

[1] The nonlinear complementarity problem with application. JOTA 4 (1969), 87～98.

T. KATO,

[1] Demicontinuity, hemicontinuity and monotonicity. Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 548～550; idem., Part II, ibid **73** (1967), 886～889.

H. LANCHON,

[1] Solution du probléme de torsion élasto-plastique d'unbarre cylindrique de section quelconque, C. R. Acad. Sc, Paris, 269 (1969), 791～794.

H. L. LANCHON and C. DUVAUT,

[1] Sur la solution du probléme de la torsion élasto-plastique d'une barre cylindrique de section quelconque. C. R. Acad. Sci. Paris, **264** (1967).

C. E. LEMKE,

[1] Recent results on complementarity problems. Proc. Princeton Symp. on Math. Programming. H. W. Kuhn ed., Princeton Univ. Press, 1970, 349～384.

J. LERAY and J. LIONS,

[1] Quelquee résultats de Vis'k surles problemes elliptiques nonlineaires par les méthodes de Minty–Browder, Bull. Soc. Math. France **93**(1965), 97～107.

C. LESCARRET,

[1] Cas d'addition des application monotones maximales dans un espace de Hilbert. C. R. Acad. Paris, **261**(1965), 1160～1163.

H. LEWY,

[1] On a Variational problem with inequalities on the boundary. J. Math. Mech. 17(1968), 861～884.

[2] On a minimum problem for superharmonic functions. Int. Conf. on Functional Anal. Tokyo, 1969.

H. LEWY and G. STAMPACCHIA,

[1] On the regularity of a solution of a variational inequality. Comm. Pure Appl. Math. **22** (1969), 153～188.

[2] On the regularity of certain superharmonic functions, J. d'Analyse Math. **23**(1970), 227～236.

[3] On existence and smoothness of solutions of some non-coercive variational inequalities, to appear.

J. L. LIONS,

[1] Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non lineaires. Dunod et Gauthier-Villars Ed., Paris, 1969.

J. L. LIONS and G. STAMPACCHIA,

[1] Variational inequalities, Comm. Pure Appl. Math. **20**(1967), 490～519.

W. LITTMAN, G. STAMPACCHIA and H. F. WEINBERGER,

[1] Regular points for elliptic equations with discontinuous Coefficients. Ann. Scuola Normale Sup. Pisa. **17**(1963), 45～79.

O. G. MANCINO, G. STAMPACCHIA,

[1] Convex programming and variational inequalities. JoTA **9**(1972), 3～23.

P. MARZULLI,

[1] Risoluzione alle differenze di equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico con condizioni su un contorno libero, Calcolo. Suppl. 1. **5**(1968), 1～22.

M. MATZEU,

[1] Dualità nella teoria della capacità. Tesi, Ist. Mat. Univ. di Roma. 1972

G. J. MINTY

[1] Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space, Duke Math, J. **29** (1962), 341~346.

[2] On a "monotonicity" method for the solution of non linear equations in Banach spaces, Proc. Natl. Acad. Sci. **50** (1963), 1038~1041

[3] On the monotonicity of the gradient of a convex function. Pacific J. Math. **14** (1964), 243~247.

[4] On the solvability of nonlinear functional equations of montonic type. pacific J. Math. **14** (1964), 243~247.

[5] On the generalization of a direct method of the calculus of variations. Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 315~321.

[6] On Some aspects of the theory of monotone operators. Pro. NATO adv. study Inst. on Theory and Appl of Monotone Operators. Venezia 1968, Oderisi Ed. 1969, 67~82.

M. MIRANDA,

[1] Frontiere minimali con ostacoli, to appear.

J. J. MORE,

[1] The application of variational inequalities to complementarity problems end existence theorems. Tech. Rep. n. 71~110. Dept. Computer Science. Cornell Univ. 1972.

J. J. MOREAU,

[1] Fonctionnelles convexes, Séminaire sur les equations aux dérivées partielles, College de France, Paris, 1966~1967, miltigraph, 1~108.

[2] Proximité et duali é dan s un espace hilbertien, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 273~299.

[3] One-sided constraints in hydrodinamics, in J. Abadie Ed., Nonlinear programming Nort Holland pub., Amsterdam (1967), 257~279.

[4] Principes extrémaux pour le probleme de la naissance de la cavitation, Journ. de Mécanique, 5 (1966), 439~470.

[5] La notion de sur-potentil et les liaisons unilaterales en élastotatique, C. R. Acad. Sci. Paris, **267** (1968), 954~957.

[6] Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité, C. R. Acad. Sci. Paris, 271 (1970), 608~611.

[7] Traitement numerique d'un probleme aux dérivées partielles de type unilateral, publ. No. **15**, Depart. d'Informatique, Univ. de Montréal, 196.

U. Mosco,

[1] Approximation of the solutions of some variational inequalities, Ann. scuola Normale Sup. Pisa, **21** (1967), 373~394.

[2] A remark on a theorem of F. E. Browder, J. Math. Anal. Appl. **20** (1967), 90~93.

[3] Convergence of solutions of variational inequalities, Proc. NATO, Adv. Study Inst. on Theory and Appl. of Monotone Operators, Venezia 1968, Oderisi Ed., 1969, 231~247.

[4] Convergence of convex sets and of solution of variational inequalities, Adv. in Math. **3**, 4 (1969), 510~585.

[5] Perturbation of variational inequalities, Proc. Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math. XVIII (1970), 182~194.

[6] On the continuity of the Young-Fenchel transform, J. Math. Anal. Appl. **35** (1971), 518~535.

[7] Dual variational inequalities to appear in J. Math. Anal. Appl **39** (1972).

U. Mosco, F. Scarpini,

[1] On the apprximation of some complementarity systems in Sobolev spaces, to appear.

M. Nedelec,

[1] Un algorithme dual pour le problème de la torsion élastoplastique d'une barre, Colloq. d'Analyse Numer., Supper Besses, 1969~70.

J. C. C. Nitsche,

[1] Variational problems with inequalities as boundary conditions, Arch. Rat. Mech. Anal. **35** (1969), 83~113.

Z. Opial,

[1] Non expansive and monotone mappings in Banach spaces, Lecture Notes Divis. Appl. Math., Brown Univ., 1967.

W. V. PETRYSHYN,

[1] Projection methods in non linear numerical functional analysis, J. Math. Mech. **17** (1967), 353~372.

P. D. ROBINSON,

[1] Complementary variational principles, in Nonlinear Functional Analysis and applications, edited by L. B. Rall, Academic Press, 1971.

R. T. ROCKAFELLAR,

[1] Characterization of the subeifferentials of convex functions, Pacific J. Math. **17** (1966), 407~510.

[2] Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions, Duke Math. J. **33** (1966), 81~90.

[3] On the virtual convexity of the domain and range of a non linear maximal monotone operator, Math. Annalen.

[4] Local boundedness of nonlinear monotone operators, Michigan Math. J.

[5] On the maximal monotonicity of subdifferential mappings, Michigan Math. J.

[6] Convex functions, monotone operators and variational inequalities, Proc. NATO Study Inst. on Theory and Appl. of Monotone Operators, Venezia 1968, Oderisi Ed. 1969, 231~247.

[7] Convex analysis, Princeton Univ Press., Princeton, 1970.

F. SCARPINI and T. VALDINOCI,

[1] Su alcuni sistemi di complementarità connessi a disequazioni variazionali di tipo ellittico, to appear in calcolo.

A. SCHIAFFINO,

[1] Su un problema di disequazioni variazionali per operatori differenziali ordinari, Boll. U. M. I. (1969), 25~35.

M. SIBONY,

[1] Sur l'approximation d'équations et inéquations aux dérivées partielles non linéaires de type monotone, to appear in J. Math. Anal. Appl.

[2] Méthodes itératives pour les équations et inequations aux dérivées partielles non linéaires de type monotone, Calcolo **7** (1970), 65~183.

G. STAMPACCHIA,

[1] Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes, C. R. Acad Sc. Paris, **258** (1964), 4413～4416.

[2] On the regularity of solutions of variational inequalities Int. Conf. on Functional Anal, Tokyo, 1969.

[3] Variational inequalities, Proc. NATO Adv. Study Inst., Venezia 1968, Oderisi Ed., 1969, 101～191.

[4] Regularity of solutions of some variational inequalities, Proc. Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math, XVIII (1970), 271～281.

[5] On a problem of numerical analysis connected with the theory of variational inequalities, I. E. I., CNR, Pisa, Nota interna B72/5, 1972.

J. STOER and C. WITZGALL,

[1] Convexity and optimization in finite dimensions I, Springer verlay, Berlin, 1970.

R. TEMAM,

[1] Solutions généralisées d'équations non linéaires non uuifor mément elliptiques, Publ Math d'Orsay, Univ Paris XI, 1970～71.

T. W. TING,

[1] Elastic-plastic torsion problem, Rat. Mech. Aual. **25** (1967), 342～366.

M. M. VAINBERG,

[1] Variational methods for the study of nonlinear operators, Holden Day; San Faancisco Cal., 1964.

[2] Le problème de la minimisation des fonctionnelles non linéaires, in problems in Non-linear Analysis, CIME Varenna 1970, Cremonese Ed., Roma, 1971.

M. M. VAINRERG and R. I. KACHUROVSKI,

[1] On the variational theory of non-linear operators and equations, Dokl. Akad. Nank. SSSR **129** (1959), 1199～1202.

H. de VEIGA,

[1] Sulla holderianita delle soluzioni di alcune disequzioni variazionali con condizioni unilaterali al bordo, Annali Mat. Pura Appl. **83** (1969), 73～112.

[2] Régularité pour une clesse d'inequations non linéaires, C. R.

Acad. Sci. Paris, **271**(1970), 23~25.

R. A. WIJSMAN,

[1] Convergence of sequences of convex sets, cones and functions, Bull. Amer. Math. Soc. **70**(1964), 186~188; idem, Part. II, Trans, Amer. Math. Soc(1966), 32~45.

E. H. ZARANTONELLO,

[1] Solving functional equations by contractive averaging, Tech. Rep. N. 160, U S. Army Research Center Madison, Wisconsin, 1960.